<u>Die Starke Wechselwirkung und die QCD</u>

Da die Wissenschaft schon immer ein großes Interesse daran hatte zu erfahren „was die Welt im Innersten zusammenhält“ (Faust, *Goethe*) ist die Quantenchromodynamik eine der wichtigsten und faszinierendsten Theorien in der Modernen Physik und noch immer Gegenstand intensiver Forschung. Im folgenden möchte ich die Grundzüge dieser komplexen Theorie vorstellen. Aus diesem Grund ist die erste Frage die wir uns stellen sollten:

Was sind die Grundbausteine der Materie?

Betrachtet man hierzu kurz die historische Entwicklung so läßt sich feststellen dass am Anfang der Kernphysik noch eine recht große Übersichtlichkeit herrschte. Die uns umgebene Welt wurde sich aufgebaut aus Elektronen, Protonen und Neutronen gedacht. Doch wie häufig in der Physik wurde durch immer bessere Versuche schnell klar, dass die Welt doch nicht so einfach ist wie man dachte. Es tauchten weitere Teilchen auf, wie Myonen oder die schwer zu „fangenden“ Neutrionos bei den Leptonen, aber auch die Hardronen Familie bekam starken Zuwachs. Dabei fiel auf das es zwar nur sechs Leptonen aber einen ganzen „Zoo“ unterschiedlichster Hadronen gibt. Erst 1964 machte Murray Gell-Mann einen Vorschlag um diese scheinbare Unsymmetrie zu beheben, er postulierte neue Teilchen aus denen alle Hardronen aufgebaut sein sollten und nannte sie Quarks. Sie sollten jetzt wie die Leptonen punktförmig sein, den Spin ½ besitzen und in zwei Versionen einmal mit Ldung +2/3 und einmal mit einer Ladung von -1/3 auftreten. Bisher haben die Experimentalphysiker in Übereinstimmung mit der Theorie sechs verschiedene Quarksorten oder „Flavours“ (Geschmacksrichtungen) gefunden, was eine wunderbare Wiederherstellung der Symmetrie der Teilchenfamilien ist. Die folgende Tabelle führt diese auf:
Quarks:

+2/3	up 0,3 GeV	charm 1,5 GeV	top ?
-1/3	down 0,3 GeV	strange 0,45 GeV	bottom 4,9 GeV

Wie oben schon beschrieben machen wir jetzt folgende Annahme:

Ansatz: Alle Hadronen werden durch Quarks gebildet!

Betrachten wir jetzt einmal zwei Beispiele: Als erstes eine so wichtiges Teilchen wie das Proton. Denken wir uns das Proton aus drei Quarks aufgebaut und zwar aus zwei up und einem down Quark. Rechnet man die Ladung nach kommt passend +1 heraus. Der Spin verteilt sich auf die drei Teilchen, so dass die beiden up-Quarks jeweils entgegengesetzten Spin besitzen. Die Summe ergibt einen gesamt Spin von ½. Unsere Annahme scheint sich also hier zu bestätigen, aber als Physiker sucht man ja immer nach einer Möglichkeit eine Theorie zu widerlegen und deshalb betrachten wir jetzt ein etwas exotischeres Teilchen und zwar das Δ^{++} Teilchen. Dieses besitzt eine Masse von 1232 MeV, einen Spin von 3/2 und die Ladung +2. Das bedeute wir müssen drei up Quarks als Konstituenten annehmen, um die Gesamtzahlen zu erreichen. Leider ergibt sich jetzt ein Problem, es befinden sich nämlich alle drei Quarks im gleichen Quantenzustand und sind somit symmetrisch bezüglich eines Quark Austausches.

Problem: Verletzung des **erweiterten Pauli-Prinzips!!!**

Erst 1970 fand Murray Gell-Mann eine Lösung für das Problem. Da man weder die neue Theorie noch das Pauli-Prinzip verwerfen wollte postulierte er, das Quarks eine bisher nicht beobachtete neue Quantenzahl besitzen.

Lösung: Eine weitere Quantenzahl muß her!

Nimmt man außerdem an, dass es drei neue mögliche Zustände gibt, dann kann man das Δ^{++} Teilchen als eine Überlagerung aller möglichen Zustände der drei up-Quarks schreiben und erhält somit eine antisymmetrische Kombination, die nach dem Pauliprinzip erlaubt ist.
Fassen wir noch mal kurz die wichtigen Aussagen im Zusammenhang mit der neuen Quantenzahl, die jetzt den Farbe genannt wird zusammen:

Postulat:
Jedes Quark hat einer der Farben: Rot, Blau oder Grün

Achtung!
Farbe kann aber nicht beobachtet werden!
Alle frei existierenden Teilchen sind farbneutral!

Da die Theoretischephysik aber immer von der Bestätigung durch das Experiment lebt, muß diese These natürlich überprüft werden. Da Farbe bei Teilchen nie direkt beobachtet wurde muß man nach anderen Möglichkeiten suchen. Tatsächlich liefert ein Vorläufer Modell der QCD, das Parton-Modell, dass bei Experimenten aber noch immer recht gute Vorhersagen trifft, eine experimentelle Bestätigung.

⇒ Quarks besitzen mit großer Wahrscheinlichkeit eine Farbe!

Haben wir uns jetzt mit der Frage beschäftigt woraus die uns bekannten Elementarteilchen bestehen, so müssen wir uns jetzt die Frage stellen, wie das Zusammenspiel bzw. die Wechselwirkung dieser Teilchen aussieht. Anders ausgedrückt:

Was hält die Quarks zusammen?

Antwort: Die starke WW beschrieben durch die QCD!

Wir werden uns also jetzt mit der Quantenchromodynamik beschäftigen. Als erstes wollen wir uns den Grundaxiomen oder Grundannahmen der QCD zuwenden. Ihre Begründung liegt alleine in der Beobachtung, sie können nicht aus einer anderen Theorie oder der QCD selber abgeleitet werden.

Grundannahmen der QCD:

1.) Jede Quarksorte existiert in 3 verschiedenen Farben: Rot, Blau oder Grün.

2.) Alle Hadronen sind farbneutral, enthalten also alle drei Farben.

3.) Nur farbneutrale Systeme können in freien Zuständen existieren.

4.) Wechselwirkung bleibt unverändert bei Vertauschung der Farbe.

Während die ersten drei Annahmen sehr einleuchten und verständlich sind wenn man bedenkt, dass die Farbe eines Teilchen bisher noch nicht beobachtet wurde, so ist zu 4.) eine kurze Erläuterung angebracht. Auch dieser Punkt folgt aus der Nichtbeobachtbarkeit der Farbe und zwar sollte es für die Wechselwirkung der Quarks egal sein wie ich ihre Farbe wähle, dies beinhaltet eine Invarianz der QCD gegenüber Drehungen im Farbraum, später wird diese Invarianz beim Aufstellen der Lagrange-Dichte noch gebraucht.

Wie sieht die zur Wechselwirkung gehörige Lagrange-Dichte aus?

Möchte man ein Quantenmechanisches System beschreiben, dann sucht man sich als Ausgangspunkt am besten die zum System gehörige Lagrang-Dichte. Sie enthält alle Informationen über die Dynamik der Wechselwirkung. Wir wollen uns im folgenden damit beschäftigen aus welchem Grund die Lagrange-Dichte der QCD gerade so aussieht.

I. Kinetischer Term für die Quarks:
Als erstes wird die LD einen Term enthalten, der die Bewegung freier Quarks beschreibt. Die Form dieses Terms ähnelt den vielleicht bekannten Beschreibungen in der QED oder schwachen Wechselwirkung.

$$L_q^{(0)}(x) = \sum_{j=1}^{f} \bar{q}^j(x)\left[i\gamma^\lambda \partial_\lambda - m_j \right] q^j(x)$$

Wir finden in dieser Formel wie in den anderen Theorien auch hier die erweiterten Pauli-Matrizen γ, die vierdimensionale Ableitung ∂_λ und die Masse m der Quarks. Die Quarks selber sind durch die beiden dreikomponentigen Vektoren q(x) dargestellt, wobei jede der drei Komponenten des Vektors das Quark in einer der drei Farben darstellt. Die Summation endlich erfolgt über Quarkflavours, also up, down, strange, usw.
Nach Punkt 4. soll unsere LD jetzt invariant gegenüber SU(3)-Transformationen im Farbraum sein. Wir wollen das überprüfen:

$$q^j(x) \rightarrow U q^j(x)$$

Wie für die SU(3) üblich erfüllt U folgende Eigenschaften: $UU^+ = 1; \det U = 1$
Unsere LD ist dann tatsächlich invariant gegenüber einer solchen Transformation, das heißt wir können unsere Farbachsen frei wählen. Leider ist U aber konstant, hängt also nicht vom Ort x ab. Dies würde zu der kuriosen Situation führen, dass ich zwar meine Farbachsen einmal frei wählen kann, dann aber an jedem Ort ob drei Meter neben mir oder auf dem Mond, wider die gleichen Achsen nehmen müßte wenn ich die gleichen Ergebnisse erhalten möchte. Daraus folgt, dass die relative Orientierung der Achsen eine absolute Bedeutung ohne jeglichen physikalischen Hintergrund bekommt. Deshalb wollen wir folgendes Postulat aufstellen:

Physikalisches Postulat:
Die Achsenrichtungen im Farbraum sollen an beliebigen
Raum-Zeit-Punkten frei wählbar sein!
⇒ Invarianz unter lokaler Eichtransformation im Farbraum.

Problem: L nicht invariant gegenüber lokaler Eichtransformation!

Eine ähnliche Situation ergabt sich in der Relativitätstheorie, wenn man die physikalischen Gesetze in einem Interialsystem im Gegensatz zu einen beschleunigten Bezugssystem betrachtete. Auch hier ergab sich, das der relative Bewegungszustand eines Beobachters an verschiedenen Punkten eine absolute Bedeutung bekam. Einstein führte aus diese

Grund das Prinzip ein, dass alle Systeme gleichwertig sein sollten. Diese Forderung führte ihn schließlich zur allgemeinen Relativitätstheorie. Man kann Symmetrie deshalb auch als Grund für das Gravitationsfeld betrachten.
Ebenso verhält es sich in der Elektrodynamik auch dort kann die Invarianzforderung für bestimmte Phasentransformationen beim Elektron, als Grund für die Einführung der Photonen verstanden werden.
Wir wollen hier genauso verfahren und lösen dieses Problem durch die Einführung der Gluonen, wobei es sich um die Trägerteilchen der starken Wechselwirkung handeln soll.

Lösung: Einführung von neuen Vektorfeldern oder Gluonen

Es ist sinnvoll acht Gluonen anzunehmen, die den acht linear unabhängigen Erzeugenden der SU(3)-Gruppe entsprechen. Wir erhalten dann acht Viererpotentiale $G^a_\lambda(x)$, die die Gluonen beschreiben, wobei a=1,...8 entspricht. Daraus definieren wir:

$$G_\lambda(x) = G^a_\lambda(x)\frac{\lambda_a}{2}$$

Die λ_a sind die Erzeugenden der SU(3) und werden Gell-Mann Matrizen genannt.

II. Kopplung zwischen Quarks und Gluonen

Um die Kopplung zwischen Quarks und Gluonen zu beschreiben, führen wir jetzt die kovariante Ableitung ein, mit:

$$\partial_\lambda \rightarrow D_\lambda = \partial_\lambda + ig_s G_\lambda(x) = \partial_\lambda + i\frac{g_s}{2}(\lambda^1 G^1_\lambda(x) + \ldots + \lambda^8 G^8_\lambda(x))$$

Die Variable g_s ist hier die Kopplungskonstante, die später noch genauer zu betrachten ist. Setzen wir diesen Term jetzt in unsere ursprüngliche LD ein erhalten wir:

$$\boldsymbol{L_q(x) = \sum_{j=1}^{f} \bar{q}^j(x)\left[i\gamma^\lambda D_\lambda - m_j\right]q^j(x)}$$

Diese LD ist jetzt tatsächlich invariant gegenüber lokalen Eichtransformationen, falls diese folgende Form haben:

$$G_\lambda(x) \rightarrow G'_\lambda(x) = U(x)G_\lambda(x)U^+(x) - \frac{i}{g_s}U(x)\partial_\lambda U^+(x)$$

⇒L ist invariant gegenüber lokaler Eichtransformation
Leider sind die Gluonen in dieser LD noch ein Faktor, der von außen vorgegeben wird. Wir wissen jetzt also wie die Quarks auf eine gegebenes Feld reagieren, nicht aber wie das Feld selbst erzeugt wird.

Problem: Gluonen als von außen vorgegebenes Feld.

Lösung: Einführung eines Gluonenfeldstärketensors.

III. Gluonen-Feld als dynamische Variable

Wie oben schon erwähnt besteht die Lösung unseres Problems in der Einführung eines Gluonenfeldstärketensors, der aufgrund möglichster Einfachheit folgende Form annimmt:

$$G_{\lambda\rho}(x) = \partial_\lambda G_\rho(x) - \partial_\rho G_\lambda(x) + ig_s\left[G_\lambda(x), G_\rho(x)\right]$$

Es handelt sich hier um eine hermitische, spurlose Matrix. Wir definieren ihre Komponenten sinnvollerweise folgendermaßen:

$$G_{\lambda\rho}(x) = G^a_{\lambda\rho}(x)\frac{\lambda_a}{2}$$

Durch Vergleichen mit dem ersten Term können wir das Aussehen von $G^a{}_{\lambda\rho}(x)$ so darstellen:

$$G^a_{\lambda\rho}(x) = \partial_\lambda G^a_\rho(x) - \partial_\rho G^a_\lambda(x) - g_s f_{abc} G^b_\lambda(x) G^c_\rho(x)$$

Die f_{abc} sind die Struckturkonstanten der SU(3) und nehmen den Wert ½ oder $3^{1/2}/2$ an. Wichtig ist außerdem das dieser Tensor ebenfalls invariant unter der von uns gewählten Transformation ist. Es folgt jetzt also die vollständige LD der QCD:

$$\boldsymbol{L_{QCD}(x) = -\frac{1}{4} G^a_{\lambda\rho}(x) G^{\lambda\rho a}(x) + \sum_{j=1}^{f} \bar{q}^j(x)\left[i\gamma^\lambda D_\lambda - m_j\right] q^j(x)}$$

Endlich!: Invariante Beschreibung der Quark-Gluonen Wechselwirkung!
Anhand dieser LD kann man die Besonderheit der QCD erkennen. Sie liegt in der Wechselwirkung der beiden Gluonenfeldtensoren begründet. Dieser Term läßt nämlich betrachtet man die Feynmann Diagramme des Systems, auch drei oder vierfach Vertizes zwischen Gluonen zu. Diese seltsame Eigenschaft der Gluonen nicht nur mit den Quarks sondern auch untereinander wechselzuwirken ist typisch für nicht-abelsche Eichtheorien, wie wir sie hier vor uns haben.
Wir wollen nach diesem recht theoretischen Teil noch Beispiele für die Anwendung der Theorie betrachten.

Die Stabilität der Drei-Quark-Zustände

Dieses Beispiel ist insofern interessant als es eine Erklärung liefert, warum der größte Teil der uns umgebenden Materie aus drei Quarks aufgebaut ist. Zunächst betrachten wir jedoch die Wechselwirkung von zwei Quarks, also einen Eingluonen Austausch.

1.) Fall: Gleiche Farben

Zwei Quarks gleicher Farbe zum Beispiel Rot tauschen ein Gluon aus. Da wir an der Stärke der Wechselwirkung interessiert ist, ist es sinnvoll die potentielle Energie beim Austausch zu betrachten. Bei einer WW zwischen zwei gleichfarbigen Quarks wird ein farbneutrales Gluon ausgetauscht, für dieses gibt es zwei Möglichkeiten:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(R\overline{R} - G\overline{G})$

b) $\frac{1}{\sqrt{6}}(R\overline{R} + G\overline{G} - 2B\overline{B})$

Die Vorfaktoren geben an mit welcher Amplitude die Gluonen koppeln. Möchte man nur etwas über die Stabilität eines Systems erfahren ist es nicht nötig die potentielle Energie, explizit auszurechnen, deshalb werden wir hier nur die Proportionalität zu dieser Kopplungsamplitude betrachten. Es gilt dann:

$$E^{a}{}_{pot} \propto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 0$$

$$E^{b}_{pot} \propto \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 \geq 0$$

da wir nicht unterscheiden können welches der Gluonen ausgetauscht wird, sondern nur das Ergebnis des Versuch beobachten können ist die wichtige Größe hier die Kombination der beiden Prozesse:

$$E^{G}_{pot} \propto \frac{2}{3} \geq 0$$

Wie man jetzt erkennt ist das Potential größer als Null, daraus folgt, dass sich zwei Quarks gleicher Farbe abstoßen.

2.) Fall: Quarks verschiedener Farbe

Zwei Quarks unterschiedlicher Farbe WW durch Austausch eines Farbgluons miteinander. Dabei können die Quarks ein Gluon austauschen das ihre Farbe nicht ändert, also ein farbneutrales Gluon oder sie tauschen ein farbiges Gluon aus und vertauschen ihre Farben. Der erste Prozeß kann wieder wie im ersten Fall mit den beiden farbneutralen Gluonen beschrieben werden, was beobachtet wird ist wieder die Kombination der beiden, es ergibt sich dann:

$$E_a \propto \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 = -\frac{1}{3}$$

Für den andren Prozeß mit Farbaustausch gilt die Proportionalität zu einer Amplitude 1. Da wir wieder die beiden WW selber nicht beobachten können, sondern letztlich nur wissen, das wir mit zwei Quarks z.B. mit den Farben Rot und Grün gestartet sind, und am Ende wieder die Farben Rot und Grün erhalten, wir wissen aber nicht was zwischen den Quarks passiert ist. Deshalb bilden wir jetzt die symmetrische und antisymmetrische Kombination zwischen den beiden WW:

$$symmetrisch: E_a + E_b \propto \frac{2}{3} \geq 0$$

$$antisymmetrisch: E^a - E^b \propto -\frac{4}{3} \leq 0$$

Wie man erkennen kann wirkt die symmetrische Kombination abstoßend, die antisymmetrische anziehend auf die zwei Quarks. Betrachten wir jetzt noch die Kombination zwischen drei Quarks.
Hier ist der stabilste mögliche Zustand die total antisymmetrische Kombination der Quarks:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \varepsilon_{ijk} q_i q_j q_k$$

Wobei die ijk für die drei Quarkfarben stehen. Es sind zwischen drei Quarks die gleichen Austauschmöglichkeiten wie in zweiten Fall gegeben, wir haben jetzt aber drei mögliche Kombinationen. Es gilt also:

$$E_{pot} = 3E^a - 3E^b \propto -3\frac{4}{3} = -4 \leq 0$$

Aus dieser Beziehung folgt also ein stark negatives Potential, so dass sich drei Quarks unterschiedlicher Farbe stark anziehen. Dieser Zustand ist einer der stabilsten der überhaupt Möglichen.
Zu bemerken ist noch das diese Betrachtung hier stark Vereinfacht ist, es wurden weder die Interferenzen zwischen den Zuständen, der Vielfach Gluonen Austausch noch die Dreikörperkräfte berücksichtigt, dennoch erkennt man auch hier die guten Vorhersagen der QCD.

Was sind die Besonderheiten der QCD?

Die QCD besitzt viele Besonderheiten, ich will zwei hier kurz zur Sprache bringen, die für die Anwendung wichtig sind.

1.) ***Die Asymptotische Freiheit***

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Frage:
Welche Kopplung hat die Farbladung?
Betrachten wir erst einmal anschaulich zwei Beispiele. Wir wollen mit einer hypotetischen Sonde die z.B. nur auf die rote Farbladung reagiert die Farbladung eines Quarks bestimmen. Es existieren dann zwei Möglichkeiten, die wir messen können. Die erste hat ihr Analogon in der QED oder auch in der klassischen Physik. Aufgrund der Vakuumfluktuationen umgibt sich das rote Quark mit einer Woche von roten und antiroten virtuellen Quarks und Gluonen, die sich so ausrichten, das sie die Farbladung abschirmen. Dabei wächst die gemessene Farbladung aber mit der Verringerung des Abstandes aber an.
Die zweite Möglichkeit für das rote Quark besteht darin während der Annäherung der Sonde einfach ein Gluon auszusenden und seine Farbe vielleicht in blau umzuändern. Unsere Sonde mißt dann gar keine Farbldung mehr. Dieser Effekt verkleinert also bei geringen Abständen die effektive Farbladung.
Betrachten wir jetzt also die Kopplungskonstante:

a) Definition analog zu QED: $\alpha = \frac{g_s^2}{4\pi}$

Statt die Abhängigkeit dieser Konstante von Abstand r zu bestimmen ist es sinnvoller den Impulsübertrag Q zu betrachten, wobei eine Verringerung des Abstands einem Vergrößerung des Impulsübertrags entspricht.

b) Betrachte Ein-Gluonen-Austausch:

Um die Formel zu bestimmen ist es nötig die Integrale die den entsprechenden Vertizes mit Hilfe der Feynman-Regeln zugeordnet sind, aufzustellen und zu berechnen. Dies möchte ich hier aufgrund der Komplexität der Formeln nicht durchführen. Für den einfachen Ein-Gluonen Austausch erhält man dann als Ergebnis:

$$\left[\alpha(Q^2)\right] = \alpha(m_q^2)\left[1 - 11\frac{\alpha(m_q^2)}{4\pi}\ln\left(\frac{Q^2}{m_q^2}\right)\right]$$

c) Term für die Virtuellen Quark-Antiquark-Schleifen:
Nun können, wie wir uns erinnern in der LD nicht nur WW zwischen Quarks und Gluonen statt finden sondern auch zwischen Gluonen selber. Es können sich also während des Gluonenaustausches noch zusätzlich Gluonenschleifen bilden, die mit

berücksichtigt werden müssen:

$$\left[\alpha(Q^2)\right]_{q\bar{q}} = \alpha(m_q^2)\left[1 + N_f \frac{\alpha(m_q^2)}{6\pi}\ln\left(\frac{Q^2}{m_q^2}\right)\right]$$

Addiert man jetzt beide Ausdrücke und summiert über alle Ordnungen erhält man als Ergebnis:

d) Die Kopplungskonstante der QCD:

$$\alpha(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2N_f)\ln\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}$$

Dabei ist Λ eine Konstante bzw. ein Skalenparameter, der sich nicht aus der Theorie selber ableiten läßt sondern experimentell bestimmt werden muß.
Besonderheit: Für eine Flavour Anzahl $N_f \leq 16$ wird $\alpha(Q^2)$ klein für kleine Abstände.
⇒ Näherungen sind für kleine Abstände möglich!
Diese Besonderheit der QCD folgt direkt aus der Gluon-Gluon-WW und daraus das bei kleinen Abständen die Gluonenemission überwiegt.
Wir wollen uns jetzt noch einmal kurz mit der zweiten Besonderheit der QCD beschäftigen.

2.) ***Confinement***

Folgende Punkte spielen beim Confinement eine Rolle:

-Es hat keinen Sinn den Grenzfall Q^2 gegen Null zu betrachten
Diesen Punkt läßt sich leicht mit dem obigen Ergebnis erklären. Da für große Abstände einfach keine Störungsrechnung mehr möglich ist.

-Die Kräfte zwischen zwei Quarks sind „gewaltig“. Die Energie die nötig ist ein Quark um 1cm aus einem Proton zu entfernen beträgt: **10^{13} GeV**
Das ist einer der Gründe warum wir keine freien Quarks beobachten oder sie aus ihren gebundenen Zuständen herauslösen können.

-Phänomen der Fragmentation
Die Fragmetation hängt ebenfalls damit zusammen. Sie bedeutet einfach, dass sich das Feld zwischen zwei Quarks bei Vergrößerung des Abstandes, aufgrund einer günstigeren Energiebilanz durch Bildung von Quark-Antiquarkpaaren aufspaltet und dann neue Bindungen mit diesen Quarks eingeht. Auch aus diesem Grund ist es nicht möglich ein Quark einfach mit „Gewalt“ aus seiner Bindung heraus zu reißen.
All diese Besonderheiten und noch einige die sicher unerwähnt geblieben sind machen der Theoretischen Physik noch das ein oder andere Problem.

⇒ Noch jede Menge Arbeit für die Theoretischen Physiker!