# Schleifenkorrekturen in der QED

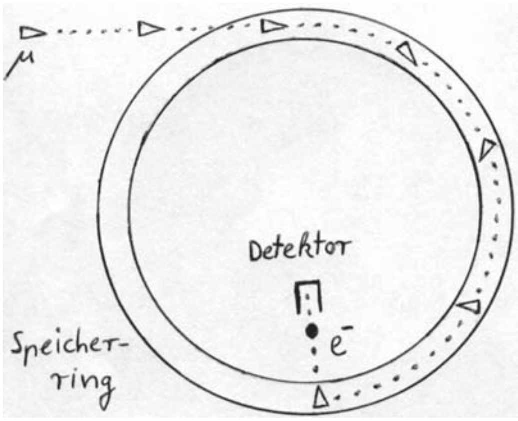
Eine charakteristische Scwierigkeit bei Berechnungen in der QED tritt bei Prozessen auf, in denen virtuelle Strahlungskorrekturen berücksichtigt werden sollen.
Die Behandlung dieser Schwierigkeiten wird in diesem Vortrag exemplarisch anhand der Berechnung des anomalen magnetischen Moments des Elektrons vorgestellt.

In der Dirac-Theorie erhält man für das magnetische Moment μ des Elektrons folgenden Ausdruck:

$$\mu = -\frac{e}{m} \cdot \frac{\hbar}{2}$$

Allgemeiner kann man das Ergebnis wie folgt schreiben: $\mu = -g \cdot \frac{e}{2m} \cdot \frac{\hbar}{2}$

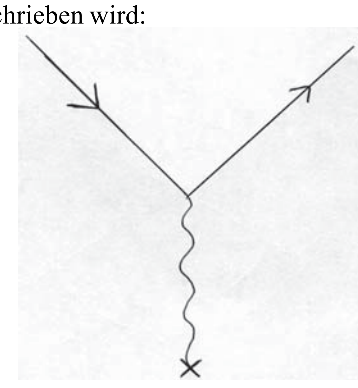
Dabei nennt man g den Lande´-Faktor, der in der Dirac-Theorie also exakt zwei ist. In der Störungsrechnung höherer Ordnung ergeben sich dagegen Korrekturen, sodass g etwas nach oben von zwei abweicht.
Diese Abweichung, also den Wert (g-2), nennt man das anomale magnetische Moment des Elektrons. Man kann es sehr präzise durch folgenden Versuchsaufbau messen:



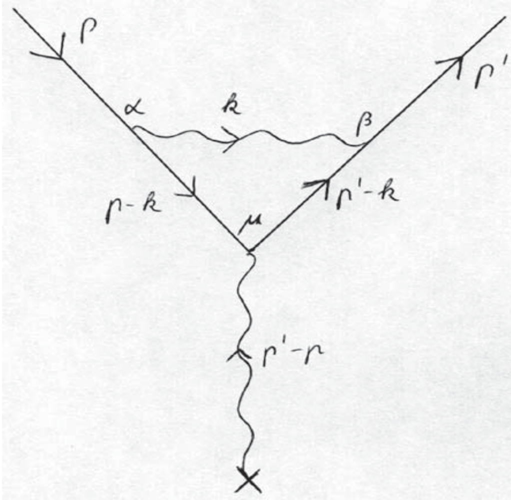

Das Experiment wurde in Brookhaven (USA) mit Myonen durchgeführt, die sich von Elektronen allerdings nur durch ihre etwa 207mal grössere Masse unterscheiden.
Die in den Speicherring eintretenden Myonen sind polarisiert, d.h. ihr Spin ist parallel zur Ausbreitungsrichtung orientiert. Im Speicherring rotieren die Myonen mit der Zyklotronfrequenz, ihr Spin allerdings mit einer Frequenz, die von ihrem magnetischen Moment, also dem Lande´-Faktor abhängig ist. Nach einigen Umläufen zerfällt das Myon, wobei ein Elektron in Spinrichtung emittiert wird. So kann man also die Änderung der Myonenspinrichtung relativ zur Ausbreitungsrichtung messen, und wie sich zeigt ist diese Änderung direkt proportional zu (g-2).
Zum anomalen magnetischen Moment des Myons tragen nicht nur elektromagnetische, sondern auch schwache und hadronische Prozesse bei, dieses Experiment stellt also einen Test für das gesamte Standardmodell dar.
Die ersten (aufsehenerregenden) Ergebnisse wurden im Frühjahr 2001 bekanntgegeben und werden am Ende des Vortrags vorgestellt und diskutiert.

Nun aber zunächst zur Berechnung des anomalen magnetischen Moments des Elektrons in der QED:

Das magnetische Moment macht sich bei der Streuung eines Elektrons an einem externen Feld bemerkbar, die durch folgenden Feynman-Graphen beschrieben wird:



Wie sich zeigt, ist die Korrektur in erster Ordnung der Störungsrechnung komplett in folgendem Graphen enthalten:




Das Aufstellen der Streuamplitude mit den Feynman-Regeln ergibt:

$$\mathcal{M} = i e \bar{u}(p') e^2 \Lambda^\mu(p',p)\, u(p)\, A_{ext}(p'-p)$$

$$\text{mit } \Lambda^\mu(p',p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k\, \gamma^\alpha S_F(p'-k) \cdot \gamma^\mu S_F(p-k) \cdot \gamma^\beta D_{\alpha\beta}(k)$$

Nach Einsetzen der Propagatoren erhält man für die Vertexkorrektur:

$$\Lambda^\mu(p',p) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4k \frac{1}{k^2+i\varepsilon} \gamma^\alpha \frac{1}{\not p' - \not k - m + i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{1}{\not p - \not k - m + i\varepsilon} \gamma_\alpha$$

Es ist nun sehr interessant, das Integral durch eine einfache Abschätzung zu analysieren:
Der Nenner ist von vierter Potenz in k, der Zähler (bei Integration in Kugelkoordinaten über den Minkowskiraum) von dritter Potenz, der Integrand verhält sich also insgesamt wie 1/k. Damit ist das Integral aber logarithmisch divergent, liefert also keineswegs nur eine kleine störungstheoretische Korrektur.

Diese Divergenz ist ein charakteristisches Problem bei der Berechnung von Schleifenintegralen. Es wurden mehrere methoden entwickelt, um mit diesen Problem fertig zu werden, das hier vorgestellte ist die

## Dimensionelle Regularisierung

Bei dieser Methode geht man von folgenden bekannten Standard-Integralen aus:

$$1.\quad \int d^4k \frac{1}{(k^2-s+i\varepsilon)^n} = i\pi^2(-1)^n \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \cdot \frac{1}{s^{n-2}} \quad ; n \geq 3$$

$$2.\quad \int d^4k \frac{k^\mu}{(k^2-s+i\varepsilon)^n} = 0 \quad ; n \geq 3$$

$$3.\quad \int d^4k \frac{k^\mu k^\nu}{(k^2-s+i\varepsilon)^n} = i\pi^2(-1)^{n+1} \frac{\Gamma(n-3)}{2\cdot\Gamma(n)} \cdot \frac{g^{\mu\nu}}{s^{n-3}} \quad ; n \geq 4$$

$$4.\quad \int d^4p \frac{1}{(p^2+pq+t+i\varepsilon)^n} = i\pi^2 \frac{\Gamma(n-2)}{\Gamma(n)} \cdot \frac{1}{(t-q^2)^{n-2}} \quad ; n \geq 3$$

Man kann nun die Dimension dieser Integrale verallgemeinern; so erhält man beispielsweise aus dem ersten Integral:

$$\int d^Dk \frac{1}{(k^2-s+i\varepsilon)^n} = i\pi^{D/2}(-1)^n \frac{\Gamma(n-\frac{1}{2}D)}{\Gamma(n)} \cdot \frac{1}{s^{n-D/2}}$$

Angenommen, man trifft nun auf folgendes divergente Integral:

$$I(s) = \int d^4k \frac{1}{(k^2 - s + i\epsilon)^2}$$

Dies kann man mit Hilfe des ersten Standard-Integrals berechnen, indem man die Dimension etwas kleiner als vier macht:

$$I_x(s) = \beta^x \int d^{4-x}k \frac{1}{(k^2 - s + i\epsilon)^2} = i\pi^{2-\frac{x}{2}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{x}{2})}{\Gamma(2)} \cdot \left(\frac{s}{\beta^2}\right)^{-\frac{x}{2}}$$

Dabei ist ß eine Massenskala, die dafür sorgt, dass die natürliche Dimension von I unabhängig von der Dimension ist, über die integriert wird.

Die rechte Seite ist wohldefiniert und man kann für sehr kleine x folgende Entwicklungsformeln (aus dem Bronstein) anwenden:

$$a^{-\frac{x}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} x \ln a$$

$$\Gamma(\tfrac{x}{2}) \approx \frac{2}{x} - \gamma \quad ; \gamma \approx 0{,}5772$$

Damit folgt für das Integral schließlich:

$$I_x(s) = i\frac{2\pi^2}{x} - i\pi^2\left[\gamma + \ln\left(\frac{\pi s}{\beta^2}\right)\right]$$

Die Divergenz ist also separiert worden und man kann einen Referenzwert s´ festlegen, sodaß die Differenz I(s)-I(s´) für x=0 einen wohldefinierten, endlichen Wert liefert:

$$\lim_{x \to 0} \left(I_x(s) - I_x(s_0)\right) = -i\pi^2 \ln\left(\frac{s}{s_0}\right)$$

In diesem etwas konstruierten Beispiel der dimensionellen Regularisierung war das divergente Integral mit einem der Standardintegrale so gut wie identisch. Um nun die bei physikalischen problemen auftauchenden Schleifenintegrale auf die gewünschte Form zu bringen, bedient man sich oft der

## Feynman - Parametrisierung

Hierbei handelt es sich um einen kleinen Mathematischen Kniff, der im wesentlichen in der folgenden Rechnung steckt:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b dt \frac{1}{t^2} = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{(a-b)}{a \cdot b}\right) = \frac{1}{a \cdot b}$$

Mit dem Feynman-Parameter z=(t-b)/(a-b) schreibt sich das Ergebnis wie folgt:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dz \frac{1}{(b + (a-b)z)^2}$$

Ein Integral mit einem Integranden der Form 1/ab kann man also kann man so also auf Standard-Integral-Form mit n=2 bringen.

Durch Induktion kann man diese Formel auf n Faktoren im Nenner erweitern, im folgenden wird nur die Formel für drei Faktoren gebraucht:

$$\frac{1}{abc} = 2\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{1}{(a + (b-a)x + (c-a)z)^3}$$

Bei der nachfolgenden Rechnung soll kurz deutlich gemacht werden, wie man die vorangegangenen Überlegungen bei der Berechnung der Vertexkorrektur anwendet:

In dimensioneller Regularisierung schreibt sich die Vertexkorrektur wie folgt:

$$\Lambda^\mu(p',p) = \frac{-i\beta^x}{(2\pi)^4}\int d^{4-x}k \, \frac{N^\mu(p',p,k)}{\underbrace{(k^2+i\varepsilon)}_{a}\underbrace{\left((p'-k)^2-m^2+i\varepsilon\right)}_{b}\underbrace{\left((p-k)^2-m^2+i\varepsilon\right)}_{c}}$$

$$\text{mit } N^\mu(p',p,k) = \gamma^\alpha(\not p' - \not k + m)\gamma^\mu(\not p - \not k + m)\gamma_\alpha$$

Anwendung der Feynman-Parametrisierung (mit den gekennzeichneten Faktoren a,b,c) ergibt:

$$\Lambda^\mu(p',p) = \frac{-i\beta^x}{(2\pi)^4}\int_0^1 dy \int_0^{1-y} dz \int d^{4-x}k \, \frac{2N^\mu(p',p,k)}{\left(k^2-2k(p'y+pz)-\tau+i\varepsilon\right)^3}$$

$$\text{mit } \tau = -y(p'^2-m^2) - z(p^2-m^2)$$

Mit weiteren Vereinfachungen ergibt sich schließlich:

$$\Lambda^\mu(p',p) = \sum_{i=0}^{2}\Lambda_i^\mu(p',p)$$

$$\text{mit: } \Lambda_i^\mu(p',p) = \frac{-i\beta^x}{(2\pi)^4}\int_0^1 dy\int_0^{1-y} dz\int d^{4-x}t \, \frac{2N_i^\mu}{(t^2-\tau-a^2+i\varepsilon)^3}$$

$$\sum_{i=0}^{2} N_i^\mu = N^\mu$$

$$N_0^\mu = \gamma^\alpha(\not p' - \not a + m)\gamma^\mu(\not p - \not a + m)\gamma_\alpha$$

$$N_1^\mu = -\gamma^\alpha\left[\not t\,\gamma^\mu(\not p - \not a + m) + (\not p' - \not a + m)\gamma^\mu \not t\,\right]\gamma_\alpha$$

$$N_2^\mu = \gamma^\alpha \not t\,\gamma^\mu \not t\,\gamma_\alpha$$

$$t^\mu = k^\mu - a^\mu = k^\mu - (p'y+pz)^\mu$$

Für i=1 stellt sich heraus, daß der Integrand ungerade ist, das Integral also verschwindet. Der Fall i=2 enthält ein logarithmisch divergentes Integral, das mit ganz ähnlichen Methoden wie im Beispiel ausgewertet werden kann. Weiterhin zeigt sich allerdings, daß der gesamte Beitrag des anomalen magnetischen Moments im Term für i=0 enthalten ist, sodaß man nur diesen Teil näher untersuchen muß.
Eine Potenzabschätzung für diesen Fall ergibt, daß der Integrand sich wie $1/k^3$ verhält, das Integral ist also nicht divergent. Damit ist also für diesen speziellen Fall die Regularisierung bereits abgesclossen, da keine störenden Divergenzen mehr auftauchen.

Die verbleibende Analyse des interessanten Terms bis zum Ergebnis für die Korrektur des magnetischen Moments ist immer noch recht lang und mühsam. Es läßt sich aber schließlich zeigen, daß die Feynman-Amplitude folgenden Term enthält:

$$\bar{u}(p')\left[-\frac{e\alpha}{4\pi m}\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right]u(p)\,A_{e\mu}(q)$$

$$\text{mit:}\quad q = p' - p$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]$$

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$$

Die Bedeutung dieses Ergebnisses wird klar, wenn man es mit der (mit Hilfe der Gordon-Identität umgeformten) Streuamplitude in niedrigster Ordnung vergleicht:

$$\mathcal{M}^{(0)} = \bar{u}(p')\left[(p'+p)\gamma^\mu - \frac{e}{2m}\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right]u(p)\,A_{e\mu}(q)$$

Hier stehen im linken Term nur die Bahndrehimpulse, die nicht zum inneren magnetischen Moment beitragen. Der volle Beitrag, also g=2, stammt also aus dem linken Teil, der dieselbe formale Struktur wie der angeführte Korrekturterm aufweist. Man kann die Korrektur des Lande´-Faktors also direkt ablesen zu:

$$g = 2\cdot\left(1 + \frac{\alpha}{2\pi} + \mathcal{O}(\alpha^2)\right)$$

Dieses Ergebnis wurde erstmals von Julian Schwinger 1948 hergeleitet (Physical Review Nr.75)

Der von mir gefundene aktuellste Wert beruht auf einer Rechnung bis zur vierten Ordnung in der Feinstrukturkonstanten, bei der 891 komplizierteste Feynman-graphen ausgewertet wurden. Er stimmt beeindruckend genau mit dem Experiment überein:

g=2,0023193048(8) (Theorie)

g=2,0023193048(4) (Experiment)

Abschließend kehren wir zurück zum Myonen-Experiment in Brookhaven. In erster ordnung stimmen die anomalen magnetischen Momente von Myon und Elektron überein, allerdings werden bei Myonen aufgrund der grösseren Masse auch schwache und hadronische Prozesse in höheren Ordnungen bedeutend.
Die im Frühjahr 2001 erschienenen Ergebnisse lauteten:

g=2,002331840(1) (Experiment)

g=2,002331832(2) (Theorie)

Dabei stammt der rechnerische Wert von einem Theoretiker der Cornell-Universtät.
Der winzige Unterschied in den Daten konnte nicht durch experimentelle oder statistische Ungenauigkeiten erklärt werden, sodaß man hoffte, einen Effekt jenseits des Standardmodells gemessen zu haben, zu dessen Erklärung es "neuer Physik", z.B. der Supersymmetrie bedurfte.

Diese Hoffnungen zerschlugen sich allerdings, als ein französisches Team eine viel unspektakulärere Erklärung fand:
Grund der Diskrepanz war ein Vorzeichenfehler in der Berechnung des theoretischen Wertes...

Tim Stockamp