

# Seminar Kern- und Teilchentheorie

## VI: *Möller- und Bhabba-Streuung*

David Kleinhans \*  
WWU Münster

Vorgetragen am 19. Juni 2002

### Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Kurze Wiederholung</b>	<b>2</b>
1.1	Quantisierung des Dirac-Feldes (2. Quantisierung) . . . . .	2
1.2	Fermionen- und Photonpropagator . . . . .	3
1.3	Das Wick'sche Theorem . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Störungsrechnung zweiter Ordnung</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Møller-Streuung – Berechnung der Feynman-Amplitude</b>	<b>8</b>
3.1	Ausführliche Auswertung der Streuamplitude . . . . .	8
3.2	Berechnung des Wirkungsquerschnitts . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Die Feynman-Regeln der QED</b>	<b>13</b>
4.1	Motivation . . . . .	13
4.2	Die relevanten Regeln . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Bhabba-Streuung – Anwendung der Feynman-Regeln</b>	<b>14</b>
<b>6</b>	<b>Schlusswort</b>	<b>16</b>

### Zusammenfassung

Nachdem in den vorangegangenen Vorträgen ausführlich die theoretischen Grundlagen der relativistischen Quantenelektrodynamik und der Streuprozesse behandelt worden sind, möchte ich nun zur konkreten Behandlung zweier spezieller Prozesse übergehen: der Elektron-Elektron-Streuung (*Møller-Streuung*) und der Elektron-Positron-Streuung (*Bhabba-Streuung*).

Dabei möchte ich insbesondere den Übergang von der allgemeinen Theorie zur Behandlung konkreter Prozesse und die Legitimation und Anwendung der *Feynman-Regeln*, die in unserer Vortragsreihe hier zum ersten Mal Anwendung finden, behandeln.

Kleine arabische Buchstaben stellen im Folgenden Vierervektoren dar, fettgedruckte Dreiervektoren, zur übersichtlicheren Darstellung wird die

---

\*kleinhan@uni-muenster.de

*Einstein'sche Summenkonvention*<sup>1</sup> verwendet. In sämtlichen Formeln ist mit natürlichen Einheiten zu rechnen (d.h.  $c = \hbar \equiv 1$ ).

## 1 Kurze Wiederholung

### 1.1 Quantisierung des Dirac-Feldes (2. Quantisierung)

Das Dirac-Feld wird in der Quantenfeldtheorie als quantisiertes Feld durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren beschrieben. Für  $\psi(x)$  und das dazu konjugierte<sup>2</sup> Feld  $\bar{\psi}(x)$  gelten folgende Fourierentwicklungen:

$$\psi(x) = \psi^+ + \psi^- \quad (1)$$

$$= \sum_{r, \mathbf{p}} \left( \frac{m}{V \cdot E(\mathbf{p})} \right)^{\frac{1}{2}} [a_r(\mathbf{p})u_r(\mathbf{p}) \cdot e^{-ipx} + b_r^\dagger(\mathbf{p})v_r(\mathbf{p}) \cdot e^{ipx}] \quad (2)$$

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^- \quad (3)$$

$$= \sum_{r, \mathbf{p}} \left( \frac{m}{V \cdot E(\mathbf{p})} \right)^{\frac{1}{2}} [b_r(\mathbf{p})\bar{v}_r(\mathbf{p}) \cdot e^{-ipx} + a_r^\dagger(\mathbf{p})\bar{u}_r(\mathbf{p}) \cdot e^{ipx}] \quad (4)$$

Die Summation über die  $r$ 's stellt eine Summation über die verschiedenen Spin-zustände dar. Diese wird zur Erhöhung der Übersichtlichkeit in der Rechnung meist weggelassen. Zur Interpretation des Ergebnisses müssen die Spinsummen später jedoch ausgewertet werden.

Die positiven und negativen Frequenzanteile der Operatoren des Dirac-Feldes lassen sich wie folgt interpretieren<sup>3</sup>:

$\psi^+$ : Vernichtung von Elektronen

$\psi^-$ : Erzeugung von Positronen

$\bar{\psi}^+$ : Vernichtung von Positronen

$\bar{\psi}^-$ : Erzeugung von Elektronen

Auch wenn diese Zuordnung, die sich aus der Fourierentwicklung ergibt, für die formale Behandlung von Problemen nicht erforderlich ist, ermöglicht sie eine anschauliche Analyse der auftretenden Terme.

Auf einen Ein-Elektron(Positron)-Zustand  $|e^{-(+)}(\mathbf{p})\rangle$  bzw. auf den Vakuumzustand  $|0\rangle$  wirken diese Operatoren wie folgt:

$$\psi^+(x)|e^-(\mathbf{p})\rangle = |0\rangle \left( \frac{m}{V \cdot E(\mathbf{p})} \right)^{\frac{1}{2}} u(\mathbf{p})e^{-ipx} \quad (5)$$

$$\bar{\psi}^+(x)|e^+(\mathbf{p})\rangle = |0\rangle \left( \frac{m}{V \cdot E(\mathbf{p})} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{v}(\mathbf{p})e^{-ipx} \quad (6)$$

<sup>1</sup>Die *Einstein'sche Summenkonvention* besagt, dass über gleiche Indizes summiert werden muss.  $x^\mu y_\mu$  entspricht also  $\sum_{\mu=0}^3 x^\mu y_\mu$ .

<sup>2</sup> $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$

<sup>3</sup>siehe auch: Vortrag von Jürgen Wiefering: *Das freie Dirac-Feld*.

$$\bar{\psi}^-(x)|0\rangle = \sum_{\mathbf{p}} |e^-(\mathbf{p})\rangle \left( \frac{m}{V \cdot E(\mathbf{p})} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{u}(\mathbf{p}) e^{ipx} \quad (7)$$

$$\psi^-(x)|0\rangle = \sum_{\mathbf{p}} |e^+(\mathbf{p})\rangle \left( \frac{m}{V \cdot E(\mathbf{p})} \right)^{\frac{1}{2}} v(\mathbf{p}) e^{ipx} \quad (8)$$

Außerdem werden wir die Erzeuger und Vernichter des Photonfeldes benötigen, die auf einen Photonzustand  $|\gamma(\mathbf{k})\rangle$  wie folgt wirken:

$$A_{\alpha}^+(x)|\gamma(\mathbf{k})\rangle = |0\rangle \left( \frac{1}{2V\omega(\mathbf{k})} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_{\alpha}(\mathbf{k}) e^{-ikx} \quad (9)$$

$$A_{\alpha}^-(x)|0\rangle = \sum_{\mathbf{k}} |\gamma(\mathbf{k})\rangle \left( \frac{1}{2V\omega(\mathbf{k})} \right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_{\alpha}(\mathbf{k}) e^{ikx} \quad (10)$$

$$(11)$$

## 1.2 Fermionen- und Photonpropagator

Im Folgenden spielen die *Feynman-Propagatoren*, insbesondere die des Dirac- und Photonfeldes, eine wichtige Rolle. Grundlage für die Definition ist die *Kontraktion*. Diese ist im Vortrag von Max Kuchel bereits definiert worden als:

$$\underbrace{A(x_1)B(x_2)} = T\{A(x_1)B(x_2)\} - N\{A(x_1)B(x_2)\} \quad (12)$$

$$= \langle 0|T\{A(x_1)B(x_2)\}|0\rangle \quad (13)$$

$T\{\dots\}$  bezeichnet hier das zeitgeordnete Produkt,  $N\{\dots\}$  die ebenfalls bereits eingeführte Normalordnung von Operatoren.

Die Kontraktion zweier Operatoren, der Vakuumerwartungswert des zeitgeordneten Produktes, verschwindet nun immer, wenn die durch den einen Operator erzeugten Teilchen durch den anderen nicht vernichtet werden können. Die nicht verschwindenden Kontraktionen werden *Propagatoren* genannt und stellen eine starke Vereinfachung für die Behandlung von Prozessen in der QED dar.

In diesem Vortrag werden nur der Fermion- und der Photonpropagator eine Rolle spielen:

$$\underbrace{\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2)} =: iS_{F\alpha\beta}(x_1 - x_2) \quad \text{Fermionpropagator} \quad (14)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p iS_F(p) e^{-ip(x_1 - x_2)} \quad (15)$$

$$\text{mit: } S_F(p) = \frac{1}{\not{p} - m + i\varepsilon} \quad (16)$$

$$\underbrace{A_{\alpha}(x_1)A_{\beta}(x_2)} =: iD_F^{\alpha\beta}(x_1 - x_2) \quad \text{Photonpropagator} \quad (17)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k iD_F^{\alpha\beta}(k) e^{-ik(x_1 - x_2)} \quad (18)$$

$$\text{mit: } D_F^{\alpha\beta}(k) = \frac{-g^{\alpha\beta}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (19)$$

### 1.3 Das Wick'sche Theorem

Im Streuoperator taucht ein zeitgeordnetes Produkt auf. Dieses lässt sich nach Wick in eine Summe aus Normalprodukten zerlegen. Das zeitgeordnete Produkt  $T\{ABCDE\dots Z\}$  kann geschrieben werden als  $T\{\dots\} = N_0 + N_1 + N_2 + \dots + N_{13}$ , wobei der Summand  $N_n$  jeweils eine Summe der Normalprodukte aller Möglichkeiten ist, auf die Operatoren  $ABCDE\dots Z$   $n$  Kontraktionen zu verteilen.

Die Wechselwirkung  $\mathcal{H}_W$  in der QED ist gegeben durch

$$\mathcal{H}_W(x) = -e \cdot N\{\bar{\psi}(x)\mathcal{A}(x)\psi(x)\} \quad (20)$$

$$= -e \cdot N\{(\bar{\psi}^+ + \bar{\psi}^-)(\mathcal{A}^+ + \mathcal{A}^-)(\psi^+ + \psi^-)\}_x \quad (21)$$

Für die Entwicklung eines Ausdrucks der Art  $T\{\mathcal{H}_W(x_1)\mathcal{H}_W(x_2)\dots\mathcal{H}_W(x_n)\}$  hat Wick sein Theorem erweitert: Ein solcher Ausdruck lässt sich wie oben beschrieben in eine Summe aus Normalprodukten entwickeln, wobei Operatoren, die dem gleichen Wechselwirkungsterm entspringen, die also zur gleichen Zeit stattfinden, nicht mit einander zu kontrahieren sind.

## 2 Störungsrechnung zweiter Ordnung

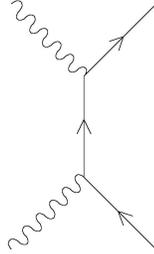


Abbildung 1: Compton-Effekt an einem Elektron

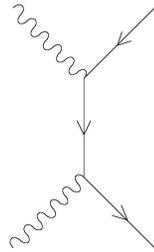


Abbildung 2: Compton-Effekt an einem Positron

Der Streuoperator  $S$  gibt die Übergangsamplitude für die Streuung des einlaufenden Zustandes  $|i\rangle$  in den Endzustand  $|f\rangle$  an. Er lässt sich, wie im vorangegan-

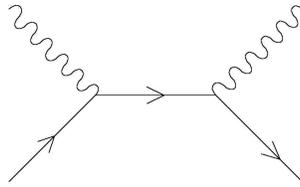


Abbildung 3: Erzeugung eines Elektron-Positron-Paares

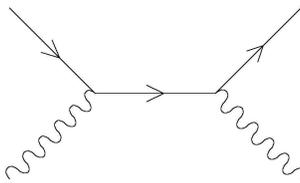


Abbildung 4: Zerstrahlung eines Elektron-Positron-Paares



Abbildung 5: Selbstenergie eines Elektrons

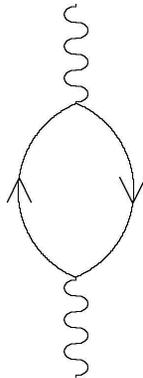


Abbildung 6: Selbstenergie eines Photons

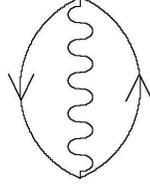


Abbildung 7: Vakuumpolarisation

genen Vortrag von Max Kuchel durchgeführt, störungstheoretisch entwickeln:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)} \quad (22)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int \dots \int d^4x_1 \dots d^4x_n T\{\mathcal{H}_W(x_1) \dots \mathcal{H}_W(x_n)\} \quad (23)$$

Prozesse erster Ordnung treten isoliert nicht auf, weil sich die Energie- und Impulserhaltung nur trivial erfüllen läßt: durch Photonen der Energie 0. Der gesamte Prozess findet an einem Ort statt und es tauchen keine Kontraktionen auf, die sogenannte virtuelle Teilchen darstellen würden, die im Prozess erzeugt und auch wieder vernichtet würden und daher in Feynman-Diagrammen als innere Linien zu erkennen sind.

Ich möchte mich deshalb mit Störungsrechnung bis zur zweiten Ordnung beschäftigen. Allen Feynmandiagrammen der zweiten Ordnung ist gemein, dass sie zwei Vertizes, das heißt zwei Punkte, an denen sich mindestens drei Linien treffen, haben. Zu untersuchen ist also:

$$S^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \iint d^4x_1 d^4x_2 T\{N\{\bar{\psi}\mathcal{A}\psi\}_{x_1} N\{\bar{\psi}\mathcal{A}\psi\}_{x_2}\} \quad (24)$$

Nach dem Wick-Theorem läßt sich dieser Ausdruck entwickeln in:

$$S^{(2)} = \sum_{I=1}^6 S_i^{(2)} \quad (25)$$

mit:

$$S_1^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \int \int d^4x_1 d^4x_2 N\{(\bar{\psi}\mathcal{A}\psi)_{x_1} (\bar{\psi}\mathcal{A}\psi)_{x_2}\} \quad (26)$$

$$S_2^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \int \int d^4x_1 d^4x_2 \left[ N\{\underbrace{(\bar{\psi}\mathcal{A}\psi)_{x_1} (\bar{\psi}\mathcal{A}\psi)_{x_2}}\} + N\{\underbrace{(\bar{\psi}\mathcal{A}\psi)_{x_1} (\bar{\psi}\mathcal{A}\psi)_{x_2}}\} \right] \quad (27)$$

$$S_3^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \int \int d^4x_1 d^4x_2 N\{\underbrace{(\bar{\psi}\gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1} (\bar{\psi}\gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2}}\} \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
S_4^{(2)} = & -\frac{e^2}{2} \int \int d^4x_1 d^4x_2 \left[ N\{ \underbrace{(\bar{\psi}\gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1} (\bar{\psi}\gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2}} \right. \\
& \left. + N\{ \underbrace{(\bar{\psi}\gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1} (\bar{\psi}\gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2}} \} \right] \quad (29)
\end{aligned}$$

$$S_5^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \int \int d^4x_1 d^4x_2 N\{ \underbrace{(\bar{\psi}\mathcal{A}\psi)_{x_1} (\bar{\psi}\mathcal{A}\psi)_{x_2}} \} \quad (30)$$

$$S_6^{(2)} = -\frac{e^2}{2} \int \int d^4x_1 d^4x_2 N\{ \underbrace{(\bar{\psi}\gamma^\alpha A_\alpha \psi)_{x_1} (\bar{\psi}\gamma^\beta A_\beta \psi)_{x_2}} \} \quad (31)$$

Die einzelnen Terme der Störungsentwicklung zweiter Ordnung beschreiben jeweils verschiedene Prozesse und sollen hier kurz diskutiert werden:

- $S_1^{(2)}$ : Hier laufen zwei Elementarprozesse, die bereits in der Störungsrechnung erster Ordnung aufgetreten sind, unabhängig voneinander an zwei verschiedenen Orten  $x_1$  und  $x_2$  ab. Da die Impulserhaltung für die beiden einzelnen Prozesse wiederum nicht gewährleistet werden kann, liefert dieser Term keinen Beitrag zur Streuamplitude.
- $S_2^{(2)}$ : Beschreibt Diagramme mit einer inneren Fermionlinie. Das sind z.B. der (Elektron)-Compton-Effekt (Abb. 1), der Positron-Compton-Effekt (Abb. 2), Paarvernichtung (Abb. 4) und Paarbildung (Abb. 3) in niedrigster Ordnung<sup>4</sup>.
- $S_3^{(2)}$ : Hier findet die innere Wechselwirkung über ein virtuelles Photon statt. Es laufen zwei Fermion-Linien ein und zwei aus. Beschrieben werden die nach Møller benannte Elektron-Elektron-Streuung, die Elektron-Positron-Streuung (Bhabba-Streuung) und die Streuung zweier Positronen aneinander. Diese Prozesse möchte ich später noch näher untersuchen.
- $S_4^{(2)}$ : Diagramme, die diesem Summanden entsprechen (wie z.B. Abb. 5), haben eine ein- und auslaufende Fermionenlinie und je ein virtuelles Fermion und Photon. Sie werden als *Selbstenergie des Elektrons/Positrons* bezeichnet.
- $S_5^{(2)}$ : Entsprechend zu  $S_4^{(2)}$  wird dieser Summand als *Selbstenergie des Photons* bezeichnet (Abb. 6).
- $S_6^{(2)}$ : Keine ein- bzw. auslaufenden, dafür drei virtuelle Teilchen. Das diesem Prozess entsprechende Diagramm Abb. 7 beschreibt die *Vakuum polarisation*.

## 3 Møller-Streuung – Berechnung der Feynman-Amplitude

### 3.1 Ausführliche Auswertung der Streuamplitude

Als Møller-Streuung bezeichnet man die Streuung von zwei Elektronen aneinander. Untersucht man das Problem klassisch, so erhält man für den differentiellen Wirkungsquerschnitt  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  eine der Rutherford'schen sehr ähnliche Streuformel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2 m^2}{16|\mathbf{p}|^4} \left( \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})} + \frac{1}{\cos^4(\frac{\theta}{2})} \right) \quad (32)$$

Der Summand proportional zu  $\frac{1}{\cos^4(\frac{\theta}{2})}$  tritt auf, weil die beiden Elektronen nicht zu unterscheiden sind und sie deswegen nicht herkunftssensitiv detektiert werden können.

<sup>4</sup>Allen Prozessen, die hier und im Folgenden betrachtet werden, können natürlich noch weitere innere Linien, sogenannte Scheifen, hinzugefügt werden. Diese Diagramme haben eine (störungstechnisch) höhere Ordnung und stellen Korrekturen dar. Erst der geringe Wert der *Sommerfeldschen Feinstrukturkonstante*  $\alpha \approx \frac{1}{137}$  (d.h.  $e^2 \ll \hbar c$ ) macht die störungstechnische Behandlung sinnvoll, weil Terme der Ordnung  $n$  proportional zu  $e^n$  sind und deswegen mit  $n$  hinreichend stark abfallen.

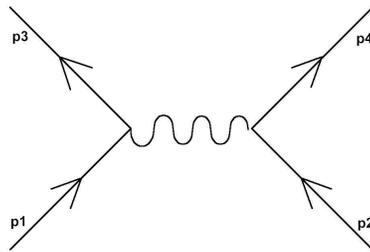


Abbildung 8: Møller Streuung – Graph I

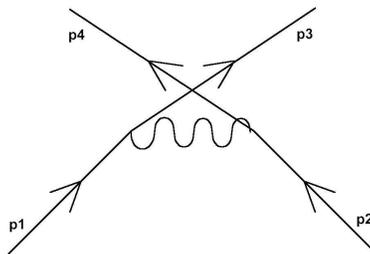


Abbildung 9: Møller Streuung – Graph II

Diese Ununterscheidbarkeit wird auch in den zur Streuung gehörenden Feynman-Diagrammen 8 und 9 deutlich und wird damit später auch in der theoretischen Behandlung des Problems auftauchen.

Der für diesen Prozess relevante Summand der Streumatrix  $S$  bei Störungsrechnung zweiter Ordnung ist der Term  $S_3^{(2)}$  aus (28). Zur Berechnung der Übergangswahrscheinlichkeit als  $|\langle f|S|i\rangle|^2$  ist zunächst die Wahrscheinlichkeitsamplitude  $\langle f|S|i\rangle$  zu bestimmen. Für die Elektron-Elektron-Streuung gilt für Anfangs- und Endzustand:

$$|i\rangle = |e^-(\mathbf{p}_1)e^-(\mathbf{p}_2)\rangle \quad (33)$$

$$|f\rangle = |e^-(\mathbf{p}_3)e^-(\mathbf{p}_4)\rangle \quad (34)$$

Für die nicht kontrahierten Felder in (28) sind nun die Zerlegungen (1) und (3) einzusetzen. Dabei lässt sich schon im Voraus überlegen, welche Frequenzanteile der beiden unabhängigen Wellenfunktionen  $\psi$  und  $\bar{\psi}$  einen nicht verschwindenden Beitrag in der Amplitude liefern:

- Die Normalordnung rückt sämtliche Vernichter ganz nach rechts. Treten positive Frequenzanteile von  $\bar{\psi}$  auf, so ist die Amplitude identisch 0. Es ist also  $\bar{\psi} := \bar{\psi}^-$  zu setzen. Damit werden die zwei Elektronen des Endzustandes erzeugt.
- Positronen tauchen nicht auf, die Erzeugung von Positronen (durch  $\psi^-$ ) und anschließende Projektion auf einen Zwei-Elektronen-Zustand führt also ebenfalls zum Verschwinden der Amplitude. Beiträge liefert also lediglich der positive Frequenzanteil von  $\psi$ ,  $\psi^+$ .

Da sowohl im Anfangs- als auch im Endzustand die Teilchen nicht zu unterscheiden sind, erhält man beim Einsetzen von (28) und der soeben motivierten Selektion der jeweiligen Frequenzanteile für die Streuamplitude:

$$\begin{aligned} S_{fi}^{(2)} &= \langle f|S^{(2)}|i\rangle = -\frac{e^2}{2} \quad (35) \\ &\cdot \left[ \langle f| \iint d^4x_1 d^4x_2 N \{ \bar{\psi}_{\mathbf{p}_3}(x_1) \gamma^\alpha \psi_{\mathbf{p}_1}(x_1) \cdot \bar{\psi}_{\mathbf{p}_4}(x_1) \gamma^\beta \psi_{\mathbf{p}_2}(x_1) \} iD_F^{\alpha\beta} |i\rangle \right. \\ &+ \langle f| \iint d^4x_1 d^4x_2 N \{ \bar{\psi}_{\mathbf{p}_4}(x_1) \gamma^\alpha \psi_{\mathbf{p}_1}(x_1) \cdot \bar{\psi}_{\mathbf{p}_3}(x_1) \gamma^\beta \psi_{\mathbf{p}_2}(x_1) \} iD_F^{\alpha\beta} |i\rangle \\ &+ \langle f| \iint d^4x_1 d^4x_2 N \{ \bar{\psi}_{\mathbf{p}_3}(x_1) \gamma^\alpha \psi_{\mathbf{p}_2}(x_1) \cdot \bar{\psi}_{\mathbf{p}_4}(x_1) \gamma^\beta \psi_{\mathbf{p}_1}(x_1) \} iD_F^{\alpha\beta} |i\rangle \\ &\left. + \langle f| \iint d^4x_1 d^4x_2 N \{ \bar{\psi}_{\mathbf{p}_4}(x_1) \gamma^\alpha \psi_{\mathbf{p}_2}(x_1) \cdot \bar{\psi}_{\mathbf{p}_3}(x_1) \gamma^\beta \psi_{\mathbf{p}_1}(x_1) \} iD_F^{\alpha\beta} |i\rangle \right] \end{aligned}$$

Da für  $x_1$  und  $x_2$  jeweils über den gesamten Raum integriert wird, liefern die erste und letzte Zeile dieses Ausdrucks genauso wie auch die mittleren beiden Zeilen jeweils den gleichen Beitrag. Es ist nun  $S = S_A + S_B$ , wobei  $S_A$  die Summe der ersten und letzten Zeile,  $S_B$  die Summe der beiden mittleren repräsentiert.

Für  $S_A$  erhält man durch Einsetzen von (2) und (4):

$$\begin{aligned}
S_A &= -2i \cdot \frac{e^2}{2} \underbrace{\langle f|N \{a^\dagger(\mathbf{p}_3)a(\mathbf{p}_1)a^\dagger(\mathbf{p}_4)a(\mathbf{p}_2)\} |i\rangle}_{\text{Faktor I}} \cdot \prod_{i=1}^4 \left( \frac{m}{V \cdot E(\mathbf{p}_i)} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\cdot \bar{u}(\mathbf{p}_3)\gamma^\alpha u(\mathbf{p}_1) \cdot \bar{u}(\mathbf{p}_4)\gamma^\beta u(\mathbf{p}_2) \quad (36) \\
&\cdot \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^4} \iiint d^4x_1 d^4x_2 d^4k e^{ip_3x_1} e^{-ip_1x_1} e^{ip_4x_2} e^{-ip_2x_2} e^{-ik(x_1-x_2)} \cdot D_F^{\alpha\beta}(k)}_{\text{Faktor II}}
\end{aligned}$$

Nun lassen sich folgende Schritte durchführen:

- Der Faktor I liefert, je nach Konstruktion von Anfangs- und Endzustand, den Faktor  $\pm 1$ . Wichtig ist, dass der entsprechende Term in  $S_B$ , in dem die Sortierung der Operatoren eine andere ist und deswegen eine weitere Vertauschung von Fermion-Operatoren notwendig ist um die gleiche Ordnung herzustellen, gerade das entgegengesetzte Vorzeichen hat. Damit kann es bei der Bildung des Betragsquadrates der Summe zur Interferenz der beiden Terme kommen. Hier soll nun gelten: Faktor I  $\equiv 1$ .
- Durch Zusammenfassen der Exponentialfunktionen und Überführung in Delta-Distributionen lässt sich der Faktor II wesentlich vereinfachen. Man erhält:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^4} \iiint d^4x_1 d^4x_2 d^4k e^{ix_1(p_3-p_1-k)} e^{ix_2(p_4-p_2+k)} \cdot D_F^{\alpha\beta}(k) \quad (37) \\
&= (2\pi)^4 \int d^4k \delta^{(4)}\{p_3+p_4-p_1-p_2\} \cdot \delta^{(4)}\{p_3-p_1-k\} \cdot D_F^{\alpha\beta}(k) \\
&= (2\pi)^4 \delta^{(4)}\{p_3+p_4-p_1-p_2\} \cdot D_F^{\alpha\beta}(p_1-p_3) \quad (38)
\end{aligned}$$

Man erkennt, dass die Exponentialfunktionen die Energie und Impulserhaltung an den Vertizes garantieren. Da bei den zu untersuchenden Prozessen keine inneren Schleifen auftauchen, sind die Energien und Impulse zu jedem Zeitpunkt durch die der ein- und auslaufenden Teilchen festgelegt.

Die Berechnung von  $S_B$  entspricht im Wesentlichen der gerade durchgeführten. Wichtig ist das aufgrund der anderen Reihenfolge der Operatoren entgegengesetzte Vorzeichen.

Für die Streuamplitude  $S_{fi} = \langle f|S|i \rangle$  erhält man nun:

$$S_{fi}^{(2)} = \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}\{p_3 + p_4 - p_1 - p_2\} \cdot \prod_{i=1}^4 \left( \frac{m}{V \cdot E(\mathbf{p}_i)} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot (\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)$$

mit:

$$\mathcal{M}_A = -ie^2 \bar{u}(\mathbf{p}_3) \gamma^\alpha u(\mathbf{p}_1) \cdot D_F^{\alpha\beta}(p_3 - p_1) \cdot \bar{u}(\mathbf{p}_4) \gamma^\beta u(\mathbf{p}_3) \quad (40)$$

$$\mathcal{M}_B = +ie^2 \bar{u}(\mathbf{p}_4) \gamma^\alpha u(\mathbf{p}_1) \cdot D_F^{\alpha\beta}(p_3 - p_2) \cdot \bar{u}(\mathbf{p}_3) \gamma^\beta u(\mathbf{p}_3) \quad (41)$$

Dabei entspricht der Summand, zu dem  $\mathcal{M}_A$  beiträgt, dem soeben berechneten  $S_A$ ,  $\mathcal{M}_B$  dementsprechend  $S_B$ . Einsetzen von (19) liefert schließlich:

$$\mathcal{M}_A = -ie^2 \bar{u}(\mathbf{p}_3) \gamma_\alpha u(\mathbf{p}_1) \cdot \frac{1}{(p_3 - p_1)^2} \cdot \bar{u}(\mathbf{p}_4) \gamma^\alpha u(\mathbf{p}_3) \quad (42)$$

$$\mathcal{M}_B = +ie^2 \bar{u}(\mathbf{p}_4) \gamma_\alpha u(\mathbf{p}_1) \cdot \frac{1}{(p_3 - p_2)^2} \cdot \bar{u}(\mathbf{p}_3) \gamma^\alpha u(\mathbf{p}_3) \quad (43)$$

### 3.2 Berechnung des Wirkungsquerschnitts

Für die Analyse und Interpretation von Streuexperimenten muss nun das Betragsquadrat der oben berechneten Streuamplitude (39) berechnet werden. Ich möchte hier nur kurz die Vorgehensweise skizzieren und die Berechnungen an dieser Stelle nicht durchführen:

Die Berechnungen sind in Schwerpunktskoordinaten durchzuführen. Mit diesen und den kinetischen Variablen, die für die Vereinfachung der Schreibweise hilfreich sind, hat sich Alexander Trzeciak in seinem Vortrag beschäftigt. Des weiteren ist über die – in den Formeln weggelassenen – Spins der verschiedenen Zustände zu summieren und – weil Spinorientierungen in den meisten Experimenten nicht detektiert werden können – zu mitteln. Geht man diesen nicht ganz einfachen Weg, so erhalten statt der Spinoren Größen wie der Streuwinkel  $\theta$  Einzug in die Formeln.

Man erhält nach längerer Rechnung für den differentiellen Wirkungsquerschnitt in Schwerpunktskoordinaten  $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{SP}$  im *nichtrelativistischen Grenzfall*:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{SP} = \frac{m^4}{16\pi^2 E^2} \cdot \frac{1}{4} \sum_{\text{Spins}} |\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B|^2 \quad (44)$$

$$= \frac{\alpha^2 m^2}{16 |\mathbf{p}|^4} \left( \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{1}{\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} - \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) \quad (45)$$

Dabei sind  $\mathbf{p}$  und  $E$  Impuls und Energie der Teilchen im Schwerpunktsystem und  $\alpha$  die Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante. Der Winkel  $\theta$  ist der Winkel zwischen einlaufendem und gestreutem Teilchen.

Man sieht hier, dass schon für kleinste Energien Abweichungen von der klassischen Streuformel (32) auftreten, die in der Interferenz der beiden relevanten Diagramme 8 und 9 begründet sind. Die Abweichungen der beiden Formeln werden für einen Streuwinkel von  $\frac{\pi}{2}$  maximal und liegen dann bei gut 30 %.

Für *relativistische Energien* zeigt der differentielle Wirkungsquerschnitt ein ungewöhnliches Verhalten: er wird antiproportional zur Energie  $E$ :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{SP}^{\text{rel}} = \frac{\alpha^2}{s} \left( \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{1}{\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} + 1 \right) \quad (46)$$

Dieses Verhalten, bei dem der dimensionslos gemachte Streuquerschnitt  $E \cdot \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{SP}$  nicht mehr von der Energie  $E$  abhängt, nennt man Skalenverhalten.

## 4 Die Feynman-Regeln der QED

### 4.1 Motivation

Nach der von *Feynman* entwickelten Systematik kann aus den Feynman-Graphen mit einigen Regeln direkt die oben aufwendig berechnete Feynman-Amplitude bestimmt werden. Ich möchte nun zunächst einen Überblick über die wichtigsten Regeln geben und im Anschluss daran die Streuung von Elektronen und Positronen aneinander (Bhabba-Streuung) mit Hilfe dieser Regeln behandeln.

Anhand der eben durchgeführten Berechnungen lässt sich nachvollziehen, an welcher Stelle die einzelnen Faktoren bei einer aufwendigen Berechnung der Amplitude auftreten würden. Die Feynman-Regeln tauchen in verschiedenen Versionen auf und unterscheiden sich im Wesentlichen durch die Normierungsfaktoren und evtl. weitere Zusätze, die erst bei Prozessen höherer Ordnung eine Rolle spielen. Ich möchte mich weiterhin an die auch von *Mandel/Shaw* verwendete Normierung und Notation halten.

### 4.2 Die relevanten Regeln

Für den jeweiligen Prozess sind zunächst alle Feynman-Graphen der gewünschten Ordnung zu erstellen. Aus diesen lassen sich die die Faktoren der Amplitude bestimmen. Die Amplitude  $\langle f|S|i\rangle$  berechnet sich als:

$$\langle f|S|i\rangle = \delta_{fi} + \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_f - P_i) \prod_{\text{Ferm.}} \left( \frac{m}{V \cdot E(\mathbf{p})} \right)^{\frac{1}{2}} \right. \quad (47)$$

$$\left. \cdot \prod_{\text{Phot.}} \left( \frac{1}{2V \cdot \omega(\mathbf{k})} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot \mathcal{M}$$

Dabei stehen  $P_i$  und  $P_f$  jeweils für die Summen über die (Vierer-)Impulse der Teilchen im Anfangs- und Endzustand. Die Feynman-Amplitude  $\mathcal{M}$  ist nun die Summe aus den zu allen  $i$  Diagrammen bis zur gewünschten Ordnung  $n$ , die den zu untersuchenden Prozess beschreiben, korrespondierenden Amplituden  $\mathcal{M}_i^{(n)}$ .

$\mathcal{M}_i^{(n)}$ , korrespondierend zum Diagramm  $i$ , enthält folgende **Faktoren**:

1. Für jeden Vertex:  $ie\gamma^\alpha$
2. Für jede interne Photonlinie:  $D_F^{\alpha\beta}(\mathbf{k}) = i\frac{-g^{\alpha\beta}}{k^2+i\epsilon}$
3. Für jede interne Fermionlinie:  $iS_F(\mathbf{p}) = i\frac{1}{\not{p}-m+i\epsilon}$
4. Für externe Linien:
  - Elektron im Anfangszustand:  $u_r(\mathbf{p})$
  - Elektron im Endzustand:  $\bar{u}_r(\mathbf{p})$
  - Positron im Anfangszustand:  $v_r(\mathbf{p})$
  - Positron im Endzustand:  $\bar{v}_r(\mathbf{p})$
  - Photon im Anfangszustand:  $\varepsilon_{r\alpha}(\mathbf{k})$
  - Photon im Endzustand:  $\varepsilon_{r\alpha}^*(\mathbf{k})$
5. Sortierung der Spinoren und Gamma-Matrizen: von rechts nach links gelesen im Sinne der „Pfeile“ der entsprechenden Linien und Vertizes.
6. Für jede Fermionschleife: Bildung der Spur, Multiplikation mit  $(-1)$ .
7. Am jedem Vertex gilt Impulserhaltung. Für jeden nicht eindeutig festgelegten Impuls  $q$  (z.B. bei inneren Schleifen):  $\frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4q$
8. Phasenfaktoren  $(-1)^m$ , wobei  $m$  die Anzahl der Vertauschung von fermionischen Operatoren zur Herstellung der Normalordnung ist.
9. Faktor  $\left[(2\pi)^4\right]^{n-f_i-b_i-1}$ , für  $n$  Vertizes,  $f_i$  innere Fermion- und  $b_i$  innere Photonlinien.

Ich möchte diese Regeln nun am Beispiel der Bhabba-Streuung anwenden.

## 5 Bhabba-Streuung – Anwendung der Feynman-Regeln

Die beiden für die Bhabba-Streuung, die Streuung von Elektron und Positron aneinander, in Störungsrechnung zweiter Ordnung relevanten Diagramme sind in Abb. 10 und 11 skizziert. Im Gegensatz zu Møller-Streuung lassen sich hier die beiden ein- und auslaufenden Teilchen unterscheiden: Damit ist die Herkunft der auslaufenden Teilchen bekannt.

Ich möchte von diesen Diagrammen nun mit Hilfe der im vorangegangenen Abschnitt wiedergegebenen Regeln direkt zur Feynman-Amplitude übergehen.

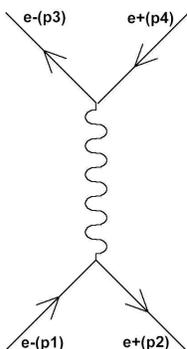


Abbildung 10: Bhabba-Streuung – Annihilationsdiagramm

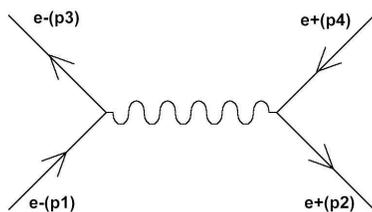


Abbildung 11: Bhabba-Streuung – Streudiagramm

Die Anfangs- und Endzustände lauten in diesem Fall:

$$|i\rangle = |e^-(\mathbf{p}_1)e^+(\mathbf{p}_2)\rangle \quad (48)$$

$$|f\rangle = |e^-(\mathbf{p}_3)e^+(\mathbf{p}_4)\rangle \quad (49)$$

Nach den Feynman-Regeln ergibt sich die Amplitude nun als:

$$S_{fi}^{(2)} = \left[ (2\pi)^4 \delta^{(4)}\{p_3 + p_4 - p_1 - p_2\} \cdot \prod_{i=1}^4 \left( \frac{m}{V \cdot E(\mathbf{p}_i)} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \cdot (\mathcal{M}_A + \mathcal{M}_B)$$

mit (50)

$$\mathcal{M}_A = -ie^2 \bar{u}(\mathbf{p}_3) \gamma^\alpha u(\mathbf{p}_1) \cdot D_F^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) \cdot \bar{v}(\mathbf{p}_2) \gamma^\beta v(\mathbf{p}_4) \quad (51)$$

$$\mathcal{M}_B = +ie^2 \bar{v}(\mathbf{p}_2) \gamma^\alpha u(\mathbf{p}_1) \cdot D_F^{\alpha\beta}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \cdot \bar{u}(\mathbf{p}_3) \gamma^\beta v(\mathbf{p}_4) \quad (52)$$

Wie schon eben durchgeführt lassen sich die Amplituden durch Einsetzen von (19) noch geringfügig vereinfachen:

$$\mathcal{M}_A = -ie^2 \bar{u}(\mathbf{p}_3) \gamma_\alpha u(\mathbf{p}_1) \cdot \frac{1}{(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3)^2} \cdot \bar{v}(\mathbf{p}_2) \gamma^\alpha v(\mathbf{p}_4) \quad (53)$$

$$\mathcal{M}_B = +ie^2 \bar{v}(\mathbf{p}_2) \gamma_\alpha u(\mathbf{p}_1) \cdot \frac{1}{(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2} \cdot \bar{u}(\mathbf{p}_3) \gamma^\alpha v(\mathbf{p}_4) \quad (54)$$

Wertet man diesen Ausdruck, wie schon bei der Møller-Strahlung beschrieben, weiter aus, so erhält man für den Grenzfall *relativistischer Energien* wiederum im Schwerpunktsystem für den differentiellen Wirkungsquerschnitt folgenden Ausdruck:

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{SP} = \frac{\alpha^2}{8E^2} \left( \frac{1 + \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} + \frac{1 + \cos^2\theta}{2} - \frac{2 \cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right) \quad (55)$$

Für niedrige Energien zerstrahlt das Elektron-Positron-Paar in zwei (Impulserhaltung!) Gamma-Quanten, eine Streuformel macht deshalb wenig Sinn.

## 6 Schlusswort

Ich hoffe, dass dieser Vortrag ein tieferes Verständnis für die von Feynman aufgestellten Regeln vermitteln kann, mit deren alleiniger Anwendung man natürlich wesentlich schneller zu den Feynman-Amplituden gelangt wäre. Auf die Berechnung der Spin-Summen, auf die ich nur kurz hingewiesen habe, ist meiner Meinung nach Henning Jürgens in seinem Vortrag näher eingegangen, diese läßt sich aber sonst auch in der Literatur nachvollziehen.

Die Ergebnisse der störungstheoretischen Behandlung der Quantenelektrodynamik stimmen, wie Tim Stockamp im letzten Vortrag der Reihe eindrucksvoll demonstriert hat, mit dem Experiment sehr genau überein.

Quellen:

Franz Mandl/Graham Shaw: *Quantenfeldtheorie* (1993)

Otto Nachtmann: *Elementarteilchenphysik – Phänomene und Konzepte* (1986)