Westfälische
Wilhelms-Universität
Münster

Ausarbeitung zum Seminarvortrag

SU(2) und SO(3)

von

Ralf Herrlich

Münster, 13.05.2015

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Woher kommen SU(2) und SO(3)?

Spricht man von Transformationen im $\mathbb{R}^3$, so kann dies mathematisch allgemein in der Form

$$\vec{x}' = R \cdot \vec{x} \tag{1.1}$$

geschrieben werden. Diese Darstellung umfasst für eine dreidimensionale Matrix R somit alle Rotationen, Speiegelungen und Skalierungen eines Vektors $\vec{x}$ in einen Vektor $\vec{x}'$. Schließt man die Skalierungen aus, so muss für das Skalarprodukt eines solchen Vektors gelten:

$$\vec{x}'^T \vec{x}' = \vec{x}^T R^T R \vec{x} \overset{!}{=} \vec{x}^T \vec{x} = \vec{x}^T I \vec{x}. \tag{1.2}$$

Und somit muss folgen

$$det(R^T R) = det(R)^2 \overset{!}{=} det(I) = 1 \tag{1.3}$$

also

$$det(R) = \pm 1. \tag{1.4}$$

Beschränkt man sich hierbei nur auf +1, so definieren alle Matrizen R, die diese Bedingung erfüllen, die Gruppe SO(3). Alle Einträge dieser Matrizen sind dabei reell.
Dieses Vorgehen kann man in analoger Weise auch auf zweidimensionale Matrizen mit komplexen Elementen anwenden. Sei U eine solche Matrix, dann definieren alle Matrizen U mit

$$U^+ U = I \Leftrightarrow det(U) = \pm 1 \tag{1.5}$$

für +1 die Gruppe SU(2).

Definiert man nun eine solche Matrix folgendermaßen

$$U := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

so ergeben sich aus (1.5) folgende Gleichungen:

$$\bar{a}a + \bar{c}c = \bar{b}b + \bar{d}d = 1, \bar{a}b + \bar{c}d = 0. \tag{1.7}$$

Aufgrund der Ähnlichkeit zum trigonometrischen Pythagoras definiert man:

$$\begin{aligned} a &:= cos(\phi)e^{i\alpha} \\ b &:= -sin(\phi)e^{-i\beta} \\ c &:= sin(\phi)e^{i\beta} \qquad \equiv -\bar{b} \\ d &:= cos(\phi)e^{-i\alpha} \quad \equiv \bar{a} \end{aligned}$$

und erhält somit die allgemeine Darstellung für Elemente der SU(2)

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

Kapitel 2

Aufbau und Darstellungen der SO(3)

Da es sich bei der Gruppe SO(3) um eine Rotationsgruppe handelt, befasst sich dieses Kapitel mit den verschiedenen Darstellungen der Gruppenelemente.

2.1 Rotationen um Koordinatenachsen

Betrachtet man einen Vektor der Länge l in der x-y-Ebene, der um einen Winkel α von der x-Achse ausgelenkt ist und dreht diesen um einen weiteren Winkel ϕ, so gilt für die Komponenten des resultierenden Vektors

$$x' = lcos(\alpha+\phi) = lcos(\alpha)cos(\phi) - lsin(\alpha)sin(\phi) = xcos(\phi) - ysin(\phi) \tag{2.1}$$

$$y' = lsin(\alpha+\phi) = lsin(\alpha)cos(\phi) + lcos(\alpha)sin(\phi) = xsin(\phi) + ycos(\phi). \tag{2.2}$$

Auf drei Dimensionen geändert ergibt sich somit die Rotationsmatrix um die z-Achse

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} cos(\phi) & -sin(\phi) & 0 \\ sin(\phi) & cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.3}$$

Dies kann analog für die anderen Achsen durchgeführt werden. Eine Rotation im dreidimensionalen Raum wird dann als Produkt der drei Rotationsmatrizen um die jeweiligen Achsen beschrieben:

$$R(\omega,\theta,\phi) = R_z(\phi)R_y(\theta)R_x(\omega). \tag{2.4}$$

Da der Vektor aktiv bezüglich der Koordinatenachsen gedreht wird, nennt man diese Form eine *aktive Drehung*.

2.2 Rotationen mittels Eulerwinkeln

Möchte man zwei Koordinatensysteme ineinander überführen und kennt lediglich die Ausrichtung der Achsen der beiden Koordinatensysteme in einem Übergeordneten Koordinatensystem, dann ist die einfachste Weise dies zu tun die Verwendung von Eulerwinkeln. Dabei wird ein sich in einem Koordinatensystem befindender Vektor nicht mehr direkt gedreht sondern indirekt indem das ihn beschreibende Koordinatensystem gedreht wird; man nennt die *passive Drehung*. Der Vektor selbst behält seine Koordinaten im übergeordneten System, wird aber bezüglich des Untersystems um den Winkel $-\phi$ gedreht. Somit gilt für eine Rotation um die z-Achse:

$$R_z(\phi) = \begin{pmatrix} cos(\phi) & sin(\phi) & 0 \\ -sin(\phi) & cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Da das Koordinatensystem selbst gedreht wird, wird eine dreidimensionale Rotation meist in der Form

$$R(\omega, \theta, \phi) = R_{z''}(\phi) R_{x'}(\theta) R_z(\omega) \tag{2.6}$$

dargestellt. Dabei x' und z'' die Achsen der bereits rotierten Systeme.

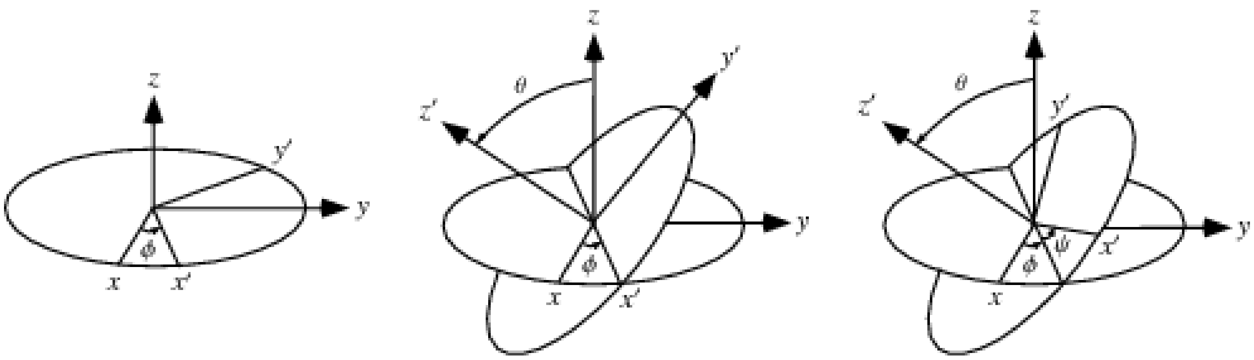

Abbildung 2.1: Rotation mittels Eulerwinkeln

Abbildung 2.1 zeigt schematisch den Ablauf einer solchen Drehung. Um die z-Achse aus ihrer ursprünglichen Lage zu bringen, kann nur die Rotation um die x'-Achse verwendet werden. Der gesuchte Winkel θ ist also der Winkel zwischen z und z''. Damit diese Drehung aber zustande kommen kann, muss die x-Achse in eine Lage senkrecht zu der von z und z'' gebracht werden, welche die Achse x' sein soll, da um z rotiert wird. Der noch gesuchte Winkel ω ist somit der Winkel zwischen x und x', der Winkel ϕ der zwischen x' und x''.

2.3 Rotation um eine beliebige Achse

Möchte man, anders als in 2.1, einen Vektor $\vec{l}$ der Länge l nicht um die Koordinatenachsen drehen sondern um eine beliebige gegebene Achse $\vec{n}$ der Länge 1, so zerlegt man $\vec{l}$ zuerst in eine Komponente $\vec{l_{||}}$, die parallel zu $\vec{n}$ ist, und eine Komponente $\vec{l_{\perp}}$, die senkrecht zu $\vec{n}$ steht. Sei außerdem der Winkel zwischen $\vec{l}$ und $\vec{n}$ gerade α. Dann folgt mit diesem Ansatz:

$$\begin{aligned} l_{||} &= l\ cos(\alpha) = 1 \cdot l\ cos(\alpha) = \vec{n} \cdot \vec{l} \\ \Rightarrow \quad \vec{l_{||}} &= \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{l}) \\ \Rightarrow \quad \vec{l_{\perp}} &= \vec{l} - \vec{l_{||}} = \vec{l} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{l}) \end{aligned}$$

Somit muss die Rotation jetzt nur um $\vec{l_{\perp}}$ durchgeführt werden, da $\vec{l_{||}}$ von der Drehung unberührt bleibt. Projiziert man die nun anstehende Drehung um $\vec{n}$ auf das Beispiel aus Abschnitt 2.1, dann übernimmt $\vec{n}$ die Rolle der z-Achse und $\vec{l_{\perp}}$ kann als x-Achse betrachtet werden. Die y-Achse kann durch das Kreuzprodukt der beiden Vektoren $\vec{n}$ und $\vec{l}$ bestimmt werden. Es gilt also

$$\begin{aligned} & |\vec{n} \times \vec{l}| = l\ sin(\alpha) \equiv l_{\perp} \\ & \Rightarrow \textit{konstruierte Achsen sind auf } l_{\perp} \textit{ normiert.} \end{aligned}$$

Somit folgt für den um den Winkel ϕ gedrehten Vektor

$$\begin{aligned} \vec{l'} &= \vec{l_{||}}' + \vec{l_{\perp}}' \\ &= \vec{l_{||}} + \vec{l_{\perp}}\ cos(\phi) + (\vec{n} \times \vec{l})\ sin(\phi) \\ &= \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{l}) + (\vec{l} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{l}))\ cos(\phi) + (\vec{n} \times \vec{l})\ sin(\phi) \\ &= \vec{l}\ cos(\phi) + (\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{l})(1 - cos(\phi)) + (\vec{n} \times \vec{l})\ sin(\phi) \\ &= R(\phi) \cdot \vec{l}. \end{aligned}$$

In Koordinatendarstellung bedeutet dies also

$$\begin{aligned} R(\phi)_{ij} &= \delta_{ij} cos(\phi) + (1 - cos(\phi))\ n_i \cdot n_j + sin(\phi) \epsilon_{ijk} n_j \\ &= \delta_{ij} cos(\phi) + (1 - cos(\phi))\ n_i \cdot n_j - sin(\phi) \epsilon_{ijk} n_k. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Kapitel 3

Infinitesimale Drehungen

Bisher wurden keine beschränkenden Angaben zu den Rotationswinkeln gemacht. Man kann also davon ausgehen, dass auch sehr kleine Winkel benutzt werden können. Sind die Winkel infinitesimal, so wird die Rotationsmatrix sich nur um einen infinitesimalen Beitrag von der Identitätsmatrix unterscheiden:

$$R(\delta\phi) = I + \Omega(\delta\phi). \tag{3.1}$$

Da es sich nach wie vor bei R um eine orthogonale Matrix handelt, kann man folgendermaßen linearisieren:

$$I = R^T R = (I+\Omega)^T(I+\Omega) = (I+\Omega^T)(I+\Omega) = I + \Omega^T + \Omega + \Omega^T\Omega \approx I + \Omega^T + \Omega. \tag{3.2}$$

Somit folgt für Ω

$$\Omega^T = -\Omega. \tag{3.3}$$

Die Matrix Ω ist also antisymmetrisch. Außerdem ist ihre Hauptdiagonale 0. Ω hängt also nur noch von drei Parametern ab:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \begin{pmatrix} 0 & -\phi_3 & \phi_2 \\ \phi_3 & 0 & -\phi_1 \\ -\phi_2 & \phi_1 & 0 \end{pmatrix} = \phi_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \phi_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \phi_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \phi_1\Lambda_1 + \phi_2\Lambda_2 + \phi_3\Lambda_3 \\
&= \vec{\phi}\cdot\vec{\Lambda}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Somit kann $\vec{\Lambda}$ als Tensor 3. Stufe aufgefasst werden:

$$\Lambda_{ijk} = -\epsilon_{ijk}. \tag{3.5}$$

Man bezeichnet Λ_1, Λ_2 und Λ_3 als die drei Generatoren der SO(3). Damit folgt nun also für kleine Drehungen

$$R = I + \Omega = I + \vec{\phi} \cdot \vec{\Lambda}, \tag{3.6}$$

bzw. explizit für die Koordinaten eines Vektors mit Einstein'scher Summmenkonvention

$$x_i = R_{ij} x_j = x_i + \phi_j \Lambda_{jik} x_k = x_i - \epsilon_{jik} \phi_j x_k = x_i - \epsilon_{ijk} \phi_k x_j. \tag{3.7}$$

Sei nun N eine natürliche Zahl, die so groß gewählt wird, dass gilt

$$\frac{\phi}{N} \approx \delta\phi, \tag{3.8}$$

dann folgt die Generatordarstellung der SO(3):

$$R(\phi) = R(\frac{\phi}{N})^N = (1 + \frac{\vec{\phi} \cdot \vec{\Lambda}}{N})^N \stackrel{N \to \infty}{\longrightarrow} e^{\vec{\phi} \cdot \vec{\Lambda}}. \tag{3.9}$$

Kapitel 4

Die Algebra der SO(3)

Da die SO(3) die Kriterien einer Lie-Gruppe erfüllt, sollen an dieser Stelle noch die Kriterien der zugehörigen Lie-Algebra untersucht werden. Dazu gehören eine *algebraische Verknüpfung* der Gruppenelemente sowie die *Existenz eines Casimir-Operators*, für den gemeinsam mit der algebraischen Verknüpfung für alle Elemente der Gruppe gilt:

$$C \circ \Lambda_\mu = 0. \tag{4.1}$$

Testet man die normale Matrix-Multiplikation als Elementeverknüpfung aus, so stellt man fest, dass das Ergebnis einer solchen Matrix-Multiplikation nicht mehr Element der Gruppe ist. Man findet z.B.

$$\Lambda_1 \cdot \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Es fällt allerdings auch auf, dass das Ergebnis schon „die Hälfte" des Generators Λ_2 ist. Man erhält also mit (3.3):

$$\Lambda_2 = \Lambda_3 \cdot \Lambda_1 - \Lambda_1 \cdot \Lambda_3 = [\Lambda_3, \Lambda_1]. \tag{4.3}$$

Allgemein findet man nach kurzer Rechnung

$$[\Lambda_\mu, \Lambda_\nu] = \epsilon_{\mu\nu\lambda}\Lambda_\lambda. \tag{4.4}$$

Als Gruppenverknüpfung kommt also der Kommutator zum Einsatz. Setzt man nun einen quadratischen Term in den Kommutator ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
\left[\Lambda_\mu^2, \Lambda_\nu\right] &= \epsilon_{\mu\nu\lambda}(\Lambda_\mu\Lambda_\lambda - \Lambda_\lambda\Lambda_\mu) \\
\left[\Lambda_\lambda^2, \Lambda_\nu\right] &= \epsilon_{\lambda\nu\mu}(\Lambda_\lambda\Lambda_\mu - \Lambda_\mu\Lambda_\lambda) = -[\Lambda_\mu^2, \Lambda_\nu] \\
\Rightarrow \quad [C, \Lambda_\nu] &= 0.
\end{aligned}$$

Der Casimir-Operator ist also die Quadratsumme über alle Generatoren.

Kapitel 5

SO(3) in der Quantenmechanik

Betrachtet man den quantenmechanischen drehimpulsoperator, so beobachtet man, dass dessen Komponenten nicht vertauschen. Es existiert jedoch ein Casimir-Operator, der als Quadratesumme der Drehimpulskomponenten wie in Kapitel 4 geschrieben werden kann.

$$
\begin{aligned}
[J_i, J_j] &= i\hbar\epsilon_{ijk}J_k && (5.1)\\
\left[J^2, J_i\right] &= 0. && (5.2)
\end{aligned}
$$

Damit folgt die Existenz einer gemeinsamen Basis von Casimir-Operator und Drehimpulskompnenten. Außerdem existiere damit ein Eigenvektor zu beiden Operatoren $|j, m>$. Somit gilt

$$
\begin{aligned}
J_3|j, m> &= \hbar m|j, m> \\
J^2|j, m> &= \hbar^2 f(j)|j, m> = \hbar^2 j(j+1)|j, m> . && (5.3)
\end{aligned}
$$

Definiert amn nun die Operatoren

$$
\begin{aligned}
J_+ &= J_1 + iJ_2 && (5.4)\\
J_- &= J_1 - iJ_2 = (J_+)^+. && (5.5)
\end{aligned}
$$

Somit folgt

$$
\begin{aligned}
[J_+, J_-] &= 2\hbar J_3 && (5.6)\\
J_+J_- &= J_1^2 + J_2^2 - i\,[J_1, J_2] = J_1^2 + J_2^2 + \hbar J_3 = J^2 - J_3^2 + \hbar J_3. && (5.7)
\end{aligned}
$$

Und damit

$$
\begin{aligned}
||J_+|j,m>||^2 &= <J_+\ j,m|J_+\ j,m> \\
&= <j,m|J_-J_+|j,m> \\
&= <j,m|J_+J_- - 2\hbar J_3|j,m> \\
&= <j,m|J^2 - J_3^2 - \hbar J_3|j,m> \\
&= \hbar^2\left[j(j+1) - m(m+1)\right] \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

bzw.

$$J_\pm|j,m> = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}|j,m\pm 1> . \qquad (5.9)$$

Da die $|j,m>$ eine Basis bilden, können aus den Wirkungen der Operatoren auf die Basisvektoren die Matrixelemente der Operatoren bestimmt werden.

$$
\begin{aligned}
<j',m'|J^2|j,m> &= \hbar^2 j(j+1)\delta_{jj'}\delta_{mm'} \qquad (5.10) \\
<j',m'|J_3|j,m> &= \hbar m\delta_{jj'}\delta_{mm'} \qquad (5.11) \\
<j',m'|J_\pm|j,m> &= \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}\delta_{jj'}\delta_{(m\pm 1)m'} \qquad (5.12)
\end{aligned}
$$

Als Beispiel kann die Matrixdarstellung der Operatoren für $j=\frac{1}{2}$ bestimmt werden:

$$
\begin{aligned}
J^2 &= \hbar^2\frac{3}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (5.13) \\
J_3 &= \hbar\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \qquad (5.14) \\
J_+ &= \hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} = (J_-)^+ \qquad (5.15) \\
\Rightarrow J_1 &= \frac{1}{2}(J_+ + J_-) = \hbar\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad (5.16) \\
\Rightarrow J_2 &= \frac{1}{2}(J_+ - J_-) = \hbar\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} \qquad (5.17)
\end{aligned}
$$

Die Matrizen J_1 bis J_3 sind bis auf ihren Vorfaktor $\frac{1}{2}\hbar$ dabei gerade die Generatoren der SU(2), die Paulimatrizen.

Kapitel 6

Zusammenhang zwischen SU(2) und SO(3)

In diesem letzten Abschnitt soll gezeigt werden, dass ein beliebiges Element aus SU(2) stets nach SO(3) abbildet. Dazu sollen zunächst einige Eigenschaften der Generatoren der SU(2) gezeigt werden, mit deren Hilfe dann das zu zeigende bewiesen wird.
Seien σ_i die aus dem vorigen Kapitel bekannten Paulimatrizen und sei $M := aI_{2\times 2} + b_i\sigma_i$ eine beliebige Matrix aus der Gruppe SU(2) mit beliebigen komplexen Koeffizienten a, b_i.
Für die Paulimatrizen gelten folgende Zusammenhänge

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma_i^+ && (6.1) \\ Sp(\sigma_i) &= 0 && (6.2) \\ \sigma_i\sigma_j &= \delta_{ij}I_{2\times 2} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k. && (6.3) \end{aligned}$$

Außerdem folgt aus der Definition von M direkt

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}Sp(M) && (6.4) \\ b_i &= \frac{1}{2}Sp(\sigma_i M) && (6.5) \end{aligned}$$

und damit auch

$$\begin{aligned} M = M^+ \quad &\Leftrightarrow \quad a, b_i \in \mathbb{R} && (6.6) \\ Sp(M) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad a = 0, b_i \in \mathbb{R}. && (6.7) \end{aligned}$$

Sei nun $U \in SU(2)$. Da definiert man die Matrizen $A_i := U\sigma_i U^+$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} Sp(A_i) &= Sp(U\sigma_i U^+) = Sp(U^+ U\sigma_i) = Sp(\sigma_i) = 0 && (6.8)\\ A_i^+ &= (U\sigma_i U^+)^+ = U\sigma_i^+ U^+ = U\sigma_i U^+ = A_i. && (6.9) \end{aligned}$$

Es gelten also die Eigenschaften (6.6) und (6.7). Damit kann A_i geschrieben werden als

$$\begin{aligned} & A_i \equiv \phi_{ji}(U)\sigma_j && \overset{(6.5)}{\Longrightarrow} && \phi_{ji} = \frac{1}{2}Sp(\sigma_j A_i) && (6.10)\\ \Rightarrow\quad & \phi_{ji}(U) \in \mathbb{R} && \Longrightarrow && \phi(U)\ ist\ reelle\ 3\times 3 - Matrix. && (6.11) \end{aligned}$$

Somit folgt aus dem Matrixprodukt

$$\begin{aligned} U\sigma_i\sigma_j U^+ &= U\sigma_i U^+ U\sigma_j U^+\\ &= A_i A_j\\ &= \phi_{ki}(U)\sigma_k\phi_{lj}(U)\sigma_l\\ &= \phi_{ki}(U)\phi_{lj}(U)(\delta_{kl}I_{2\times 2} + i\epsilon_{klm}\sigma_m)\\ &= (\phi^T(U)\phi(u))_{ij}I_{2\times 2} + i\epsilon_{klm}\phi_{ki}(U)\phi_{lj}(U)\sigma_m && (6.12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= U(\delta_{ij}I_{2\times 2} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k)U^+\\ &= \delta_{ij}I_{2\times 2} + i\epsilon_{ijk}A_k\\ &= \delta_{ij}I_{2\times 2} + i\epsilon_{ijk}\phi_{mk}(U)\sigma_m. && (6.13) \end{aligned}$$

Mittels „Koeffizientenvergleich“ bezüglich $I_{2\times 2}$ und $i\sigma_m$ erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \phi^T(U)\phi(U) &= I_{3\times 3} && (6.14)\\ \epsilon_{klm}\phi_{ki}(U)\phi_{lj}(U) &= \epsilon_{ijk}\phi_{mk}(U). && (6.15) \end{aligned}$$

Aus (6.14) folgt somit unmittelbar, dass $\phi(U) \in O(3)$ sein muss. Multipliziert man (6.15) mit $\phi_{mn}(U)$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} \epsilon_{klm}\phi_{ki}(U)\phi_{lj}(U)\phi_{mn}(U) &= \epsilon_{ijk}\phi_{mk}(U)\phi_{mn}(U)\\ &= \epsilon_{ijk}(\phi^T(U)\phi(U))_{kn}\\ &= \epsilon ijk\delta kn\\ &= \epsilon ijn. && (6.16) \end{aligned}$$

Wählt man schließlich $\{i, j, n\} = \{1, 2, 3\}$, so ergibt sich gerade

$$\begin{aligned} & \epsilon_{klm}\phi_{k1}(U)\phi_{l2}(U)\phi_{m3}(U) &= 1 & \\ \Rightarrow \quad & det(\phi(U)) &= 1 & \quad (6.17) \\ \Rightarrow \quad & \phi(U) \in SO(3). & & \quad (6.18) \end{aligned}$$

Literaturverzeichnis

[Prof. Michael Klasen] *Vorlesungsskript Quantentheorie I und II*, WWU Münster, Münster (2014)

[A. W. Joshi] *Elements of Group Theory for Physicists*, New Delhi (1997) ISBN 81-224-0975-X

[Stefan Scherer] *Vorlesungsskript Gruppentheorie in der Physik I und II*, Johannes-Gutenberg-Universität Mainz, Mainz (2007)

Abbildungsverzeichnis