*Alexander Hock*

a-hock@gmx.net

# Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder
# Nichtabelsche Eichsymmetrie

Datum des Seminarvortrags: 10.06.2015

**Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Deutschland**

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Die Eichtheorie und die damit verbundene Eichsymmetrie ist ein sehr wichtiger Grundbaustein des heutigen Standardmodells. Das Standardmodell besteht aus zwei Eichsymmetrien, der elektroschwachen Wechselwirkung und der starken Wechselwirkung. Die Schema der Eichsymmetrie soll hier veranschaulicht werden, außerdem wird der Unterschied zwischen einer abelschen und einer nichtabelschen Eichsymmetrie verdeutlicht.
Das Standardmodell ist eine Quantenfeldtheorie, welche sich durch Feldgleichungen beschreiben lässt. Wie auch in klassischen Mechanik bietet es sich an mit dem Lagrange-Formalismus zu arbeiten.

# 2 Relativistische Feldgleichungen

Aus der relativistischen Beschreibung der Quantenmechanik sind relativistischen Feldgleichungen bekannt. Die Dirac-Gleichung hat die Form

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0,$$

wobei $\hbar = c = 1$ gesetzt wurde und $\gamma^\mu$ $4 \times 4$-Matrizen sind mit $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$. Die Dirac-Gleichung beschreibt Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen, wie z.B. Elektronen oder Quarks. Im Gegensatz zur klassischen Mechanik wird in Feldtheorien die Lagrangedichte verwendet. Für ein Dirac-Feld ist diese

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi.$$

Die Dirac-Gleichung folgt wieder aus der Euler-Lagrange-Gleichung.
Eine weitere relativistische Gleichung ist die Klein-Gordon-Gleichung. Diese hat für ein komplexes skalares Feld die Form

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi = 0.$$

Die Klein-Gordon-Gleichung beschreibt Spin-0-Teilchen, wie z.B. die unterschiedlichen Pionen. Die dazugehörige Lagrangedichte ist

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu\phi)^\dagger(\partial_\mu\phi) - m^2\phi^\dagger\phi.$$

# 3 Abelsche Eichsymmetrie

Bei der abelschen Eichsymmetrie betrachten wir eine Transformation eines Dirac-Feldes unter der U(1). Dies bedeutet, dass unser Dirac-Feld eine zusätzliche komplexe Phase erhält

$$\psi \to \psi' = e^{-iq\alpha}\psi$$
$$\bar{\psi} \to \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{iq\alpha}$$

Die Transformation wird als globale Eichtransformation bezeichnet, da $\alpha$ unabhängig vom Ort ist. Die Lagrangedichte ist unter dieser globalen Eichtransformation erhalten $\mathcal{L}' = \mathcal{L}$, somit handelt es sich hier um eine Symmetrie. Aus dem Noether-Theorem ist bekannt, dass eine kontinuierliche Symmetrie eine Erhaltungsgröße zur Folge hat, welche als Noether-Strom bezeichnet wird

$$j^\mu = q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi.$$

Wird nun eine lokale Eichtransformation betrachtet, also $\alpha \to \alpha(x)$, erkannt man schnell, dass die Lagrangedichte nicht erhalten ist. Dies führt auf Probleme, da eine lokale Eichtransformation ebenfalls die Lagrangedichte erhalten muss. Aus der Quantenmechanik ist bekannt, das nur Wahrscheinlichkeitsdichte physikalisch ist. Außerdem verbietet das Kausalitätsprinzip eine gleichzeitige Festlegung solcher Phasen, welche einen instantanen Informationsübertragung zur Folge hätte.
Die lokale Eichinvarianz muss somit gefordert werden. Hierzu wird das Eichfeld $A^\mu$ eingeführt, welches an den Noether-Strom koppelt und transformiert mit

$$A^\mu \to A^{\mu\prime} = A^\mu + \partial^\mu \alpha.$$

Unter dieser zusätzlichen Transformation ist die lokale Eichinvarianz gegeben, welche einfach nachgerechnet werden kann. Die neue Lagrangedichte wird mit der kovarianten Ableitung $D_\mu$ geschrieben

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + j^\mu A_\mu = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \underbrace{(\partial_\mu - iqA_\mu)}_{D_\mu} - m)\psi.$$

Es stellt sich heraus, dass das Eichfeld in der Quantenelektrodynamik das Maxwell-Feld ist und mit Hilfe der lokalen Eichinvarianz die Kopplung geladener Teilchen an das Maxwell-Feld beschrieben wird. Führt man noch das frei Maxwell-Feld hinzu, erhält man die vollständige Lagrangedichte der Quantenelektrodynamik

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

wobei $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \frac{i}{q}[D_\mu, D_\nu]$ als Feldstärketensor bezeichnet wird.

# 4 Nichtabelsche Eichsymmetrie

Bei der nichtabelschen Eichsymmetrie betrachten wir eine Transformation bei der die Generatoren der Gruppe nicht kommutieren. Eine solche Lie-Gruppe ist zum Beispiel die SU(N) (spezielle unitäre Gruppe). Die SU(N) ist definiert durch

$$\mathrm{SU(N)} = \{U \in M(N,\mathbb{C}) \quad | \quad U^\dagger U = UU^\dagger = 1, \quad \det U = 1\}.$$

Die spezielle unitäre Gruppe kann ebenfalls als eine differenzierbar Mannigfaltigkeit aufgefasst werden. Die Generator $T^a$ erzeugen die Gruppe und erfüllen folgende Lie-Algebra

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c,$$

wobei $f^{abc}$ als Strukturfaktor bezeichnet wird. Die Generatoren können als Elemente des Tangentialraumes der Mannigfaltigkeit am Einselement aufgefasst werden. Über die Exponentialabbildung findet man den Zusammenhang zwischen der Lie-Gruppe und der Lie-Algebra

$$U = \exp(-i\alpha^a T^a).$$

Um das Verhalten einer SU(N) Transformation zu untersuchen, wollen wir hier ein N-dimensionales komplexes Feld einführen

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ . \\ . \\ \phi_N(x) \end{pmatrix}$$

mit der Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi)^\dagger (\partial_\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi.$$

Die Transformation unter der SU(N) hat die Form

$$\phi \to \phi' = U\phi = \exp(-i\alpha^a T^a)\phi.$$

Analog zur abelschen Eichsymmetrie existiert hier eine globale Eichinvarianz. Wird jedoch eine lokale Transformation betrachte ($\alpha$ wird wieder ortsabhängig), ist keine Invarianz der Lagrangedichte vorhanden.
Um dieses Problem zu lösen wird auch hier eine kovariante Ableitung eingeführt

$$D_\mu \phi(x) := (\partial_\mu - igA_\mu(x))\phi(x)$$

mit $A_\mu(x) := A^a_\mu(x)T^a$ und $g$ als Kopplungskonstante. Da die Eichfelder durch die Generatoren $T^a$ entstehen, existieren $N^2 - 1$ Eichfelder (dim(SU(N))= $N^2 - 1$).
Damit die Lagrangedichte jetzt unter einer Transformation invariant bleibt, muss gelten

$$\begin{aligned} D'_\mu(x)\phi'(x) &\overset{!}{=} U(x)D_\mu(x)\phi(x) \\ \Leftrightarrow (\partial_\mu - igA'_\mu(x))U(x)\phi(x) &= U(x)(\partial_\mu - igA_\mu(x))\phi(x) \\ \Leftrightarrow (\partial_\mu U(x))\phi(x) + U(x)\partial_\mu\phi(x) - igA'_\mu(x)U(x)\phi(x) &= U(x)\partial_\mu\phi(x) - igU(x)A_\mu(x)\phi(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{A'_\mu(x) = U(x)A_\mu U^{-1}(x) - \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^{-1}(x)}$$

Somit erhalten wir die Transformation der Eichfelder unter der SU(N). Dies bedeutet gleichzeitig, dass ebenfalls $D'_\mu = U(x)D_\mu U^{-1}(x)$ gilt. Bei einer infinitesimalen Transformation ($U \approx 1 - i\alpha^a T^a$) der einzelnen Komponenten ergibt sich

$$A^a_\mu \to A^{a\prime}_\mu = A^a_\mu - f^{abc}\alpha^b A^c_\mu - \frac{1}{g}(\partial_\mu \alpha^a).$$

Durch die Natur der Nichtabelschen Eichgruppe ergibt sich ein zusätzlicher Term, der proportional zum Struktur Faktor $f^{abc}$ ist.
Mit der kovarianten Ableitung kann ein Feldstärketensor angegeben werden. Der Feldstärketensor beschreibt nur noch die Eichfelder. Der Feldstärketensor muss die Transformationseigenschaft $F'_{\mu\nu}(x) = U(x)F_{\mu\nu}(x)U^{-1}(x)$ besitzen, welche auch bei der kovarianten Ableitung zutrifft. Aus diesem Grund bietet es sich an die Darstellung des Feldstärketensors durch den Kommutator (siehe abelsche Eichtheorie) zu verwenden. Die Form des Feldstärketensors ändert sich im Vergleich zur abelschen Eichtheorie, da die Eichfelder nicht kommutieren

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu] \\ F^a_{\mu\nu} &= \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f^{abc} A^b_\mu A^c_\nu. \end{aligned}$$

Die vollständige Lagrangedichte der nichtabelschen Eichtheorie hat somit die eichinvariante Form

$$\mathcal{L} = (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi \underbrace{- \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu,a}}_{\mathcal{L}_{\mathbf{YM}}},$$

wobei der letzte Term $\mathcal{L}_{\mathbf{YM}}$ als Yang-Mills-Lagrangedichte bezeichnet wird.

# 5 Folgen

Der Unterschied zwischen der abelschen und nichtabelschen Eichtheorien ist nicht nur theoretischer Natur, physikalisch hat es extrem große Auswirkungen. Betrachtet man nochmal die Yang-Mills-Langrangedichte und rechnet diese konkret aus, entstehen Selbstwechselwirkungsterme der Eichfelder welche die Form haben

$$\begin{aligned} &\sim g(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu) A^{\mu,b} A^{\nu,b} \\ &\sim g^2 A^a_\mu A^b_\nu A^{\mu,c} A^{\nu,d}. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Eichfelder miteinander wechselwirken können, in einem 3er-Vertex ($\sim g$) oder einem 4er-Vertex ($\sim g^2$). Anschaulich entsteht dies dadurch, dass die Eichfelder selber die Ladung tragen an die Sie koppeln.
Ein Beispiel der nichtabelschen Eichtheorie ist die Quantenchromodynamik. Die Eichfelder dort sind die Gluonen, welche an die Farbladung der Quarks koppeln. Die Gluonen tragen selber ebenfalls eine Farbladung.
In der Quantenelektrodynamik ist dieses Phänomen nicht zu finden, da die Photonen an

die elektrische Ladung koppeln, jedoch selber ungeladen sind.
Eine weitere Folge der nichtabelschen Eichtheorie ist die asymptotische Freiheit. Dies bedeutet, dass die Kopplungskonstante $g$ nicht mehr konstant ist, sondern von dem Impulsübertrag bei einer Wechselwirkung abhängt.

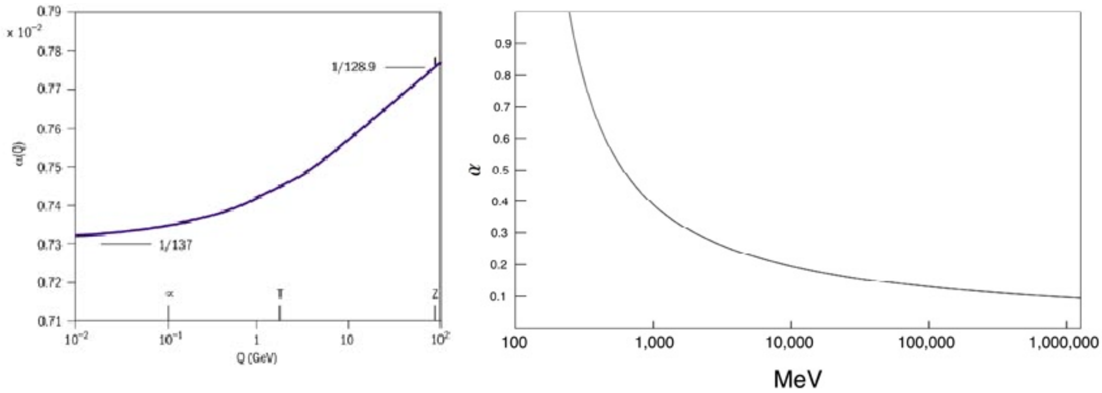


Abbildung 1: Impulsabhängige Kopplungskonstanten in der QED und QCD

Abb.(1) zeigt auf dem linken Diagramm das Verhalten der Kopplungskonstante in der QED. Mit steigendem Impulsübertrag steigt die Kopplungskonstante. Das rechte Diagramm zeigt das Verhalten der Kopplungskonstante in der QCD. Mit steigendem Impulsübertrag werden die Teilchen asymptotische frei, da die Kopplungskonstante gegen 0 läuft. Dies hängt wieder damit zusammen, dass die Gluonen selber Farbladung tragen. Experimentell konnte dieses Verhalten schon bestätigt werden.

# Literatur

[1] B. Echtermeyer (Vorlesung G. Münster): Gauge Theories of the Strong and Electroweak Interactions, 2015

[2] Peskin, Schroder: An Introduction to Quantum Field Theory, Perseus Books, 1995