

# Nichtabelsche Eichsymmetrie

Zusammenfassung des Seminarvortrags  
im Rahmen des  
Seminars zur Theorie der Teilchen und Felder

Kevin Eckert (k.eckert@uni-muenster.de)

13. Februar 2014

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung und Motivation</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Historische Versuche der Beschreibung der starken Kernkraft</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Eigenschaften nichtabelscher Eichsymmetrien</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Flavour-Darstellung vs QCD</b>	<b>8</b>
<b>5</b>	<b>QCD als Eichtheorie</b>	<b>11</b>
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>15</b>

## 1 Einleitung und Motivation

In der modernen Physik werden die drei Grundkräfte des Standardmodells (die elektromagnetische Kraft, sowie die schwachen und starken Kernkräfte) mithilfe von Quantenfeldtheorien beschrieben. Jede Theorie unterliegt dabei einer Eichsymmetrie, was bedeutet, dass die zugehörige Lagrange-funktion invariant unter bestimmten Transformationen ist, welche auch als Eichtransformationen bezeichnet werden.

Nachdem es in den Vierziger Jahren gelungen war die Quantenelektrodynamik (QED) im Rahmen einer Eichtheorie zu beschreiben, wurden in den Fünfziger und Sechziger Jahren des 20. Jahrhunderts Versuche unternommen, das Prinzip der Eichsymmetrie auf die Beschreibung der starken Kernkraft zu übertragen. Ausschlaggebend hierfür waren die großen Erfolge der QED, beispielsweise die theoretische Vorhersage des anomalen magnetischen Moments des Elektrons, welche in sehr guter Übereinstimmung zum Experiment ist.

Die QED wird als abelsche Eichtheorie mit der Symmetriegruppe  $U(1)$  beschrieben. Fordert man die Invarianz der Lagrange-funktion unter **globalen** Eichtransformationen der  $U(1)$ , so folgt aus dem Noether-Theorem die Erhaltung der elektrischen Ladung. Fordert man ferner die Invarianz unter **lokalen**  $U(1)$ -Transformationen, so erhält man einen Wechselwirkungsterm zwischen den Materieteilchen (Fermionen) der Theorie und ihren Austauscheteilchen, den Eichbosonen (im Falle der QED handelt es sich bei den Eichbosonen um die Photonen). Dies lässt sich wie folgt zeigen: Die Lagrange-funktion der freien Dirac-Gleichung

$$\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad (1)$$

ist invariant unter den gemeinsamen Transformationen:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x) \quad (2)$$

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu(x) \quad (3)$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{iq\alpha(x)}\psi(x) \quad (4)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)e^{-iq\alpha(x)} \quad (5)$$

Der erste Term beschreibt die bereits aus der Elektrodynamik bekannte Eichfreiheit des kovarianten Viererpotentials  $A_\mu$  des elektrischen Feldes. Wird dieses um den Vierer-Gradienten einer beliebigen, zweifach stetig differenzierbaren skalaren Funktion  $\alpha(x)$  erweitert, so ändern sich die physikalischen Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$ , sowie die Maxwell-Gleichungen nicht.

Die zweite Gleichung beschreibt den Übergang der einfachen partiellen Ableitung zur sogenannten kovarianten Ableitung und beinhaltet das Viererpotential  $A_\mu$ . Dies geschieht in Analogie zur Quantenmechanik, in der der Impulsoperator  $\hat{p}$  in Anwesenheit eines elektrischen Feldes erweitert wird zu  $\hat{p} \rightarrow \hat{p}' = \hat{p} - q\vec{A}$ . Die Lagrange-funktion ist allerdings nur invariant unter den Eichtransformationen, falls die Spinorfelder  $\psi$  und  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$  mit einer komplexen Phase versehen werden, wobei  $q$  die Elementarladung bezeichnet und  $\alpha(x)$  die aus der Eichtransformation von  $A_\mu$  bekannte skalare Funktion ist. Mathematisch gesehen handelt es sich bei der Transformation der Spinorfelder um eine  $U(1)$ -Phasentransformation. Dies ist der physikalisch intuitivere Zugang zu den obigen Transformationen.

Anders herum betrachtet erzwingt eine lokale  $U(1)$ -Transformation der Spinorfelder, sowie die Forderung der Invarianz der Lagrange-funktion unter selbigen, die Eichtransformation des Viererpotentials, sowie den Übergang zur kovarianten Ableitung um überzählige Terme zu eliminieren. Aus der kovarianten Ableitung folgt ein Wechselwirkungsterm  $\mathcal{L}_{int} = -q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi$ . Für eine vollständige

Lagrangefunktion muss noch ein kinetischer Term  $\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  für das elektromagnetische Feld mit den Feldstärketensoren  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  hinzugefügt werden. Es ergibt sich für die volle QED-Lagrangefunktion folgender Ausdruck:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - q\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\ &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} + \mathcal{L}_{kin}\end{aligned}\tag{6}$$

Der Wechselwirkungsterm lässt sich gemäß dem Noether-Theorem zudem schreiben als  $\mathcal{L}_{int} = J^\mu A_\mu$ , wobei  $J^\mu = -q\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  den erhaltenen Viererstrom der QED bezeichnet.

## 2 Historische Versuche der Beschreibung der starken Kernkraft

Bereits in den Dreißiger Jahren des 20. Jahrhunderts war aus einer Vielzahl von Experimenten ersichtlich geworden, dass Protonen und Neutronen (zusammenfassend als Nukleonen bezeichnet) eine annähernd gleiche Masse besitzen und unter Prozessen der starken Kernkraft gleichwertig behandelt werden. Aufgrund dessen folgerte Werner Heisenberg bereits 1932, dass Protonen und Neutronen unter der starken Kernkraft lediglich verschiedene Zustände eines einzelnen Teilchens, des Nukleons waren. Aufgrund der formalen Analogie zum Spin in der Quantenmechanik wurde später der Begriff des Isospins geprägt. Folglich lassen sich Protonen und Neutronen als Dublett des (starken) Isospins schreiben:

$$\mathcal{L}_{nuc} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \quad \text{mit} \quad \psi = \psi_p \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}\tag{7}$$

Protonen und Neutronen werden durch unterschiedliche Eigenwerte der dritten Isospinkomponente  $I_z$  voneinander unterschieden ( $I_z(p) = +1/2$ ,  $I_z(n) = -1/2$ ). Die Invarianz dieser Lagrangedichte unter globalen Drehungen im Isospinraum entspricht mathematisch einer  $SU(2)$ -Transformation des Isospindubletts und führt gemäß dem Noether-Theorem zur Erhaltung der drei Isospinkomponenten. Diese formale Analogie zum Spin der Quantenmechanik ist der Grund für die Bezeichnung "Isospin". Yang und Mills stellten ab 1954 in Anlehnung zur QED Überlegungen zu lokalen  $SU(2)$ -Transformationen an, konnte doch (wie bereits in der QED demonstriert) die Generierung eines Wechselwirkungsterms erwartet werden. Da jedoch die  $SU(2)$  als nichtabelsche Symmetriegruppe einige Besonderheiten aufweist, ist es lohnenswert sich zunächst mit dem allgemeinen Fall der nichtabelschen  $SU(N)$  zu beschäftigen und einige formale Aspekte heraus zu stellen.

## 3 Eigenschaften nichtabelscher Eichsymmetrien

Zunächst soll der Begriff der nichtabelschen Gruppe präzisiert werden:

Eine Gruppe  $G$  auf der die Verknüpfung  $*$  definiert ist heißt genau dann nichtabelsch, wenn es mindestens zwei Elemente  $a, b \in G$  gibt, für die gilt:  $a * b \neq b * a$ .

Einfach gesprochen gibt es mindestens zwei Gruppenelemente, die unter der Gruppenverknüpfung

nicht kommutieren. Die spezielle unitäre Gruppe  $SU(N)$  (definiert als die Gruppe der unitären  $n \times n$  Matrizen mit Determinante gleich Eins) ist ein Beispiel für eine nichtabelsche Gruppe. Von besonderer Bedeutung ist weiterhin der Begriff der Lie-Gruppen, da diese zur Beschreibung kontinuierlicher Symmetrien genutzt werden können, welche in der Teilchenphysik häufig vorkommen.

Eine Lie-Gruppe ist definiert als eine Gruppe  $G$ , versehen mit einer differenzierbaren Struktur, so dass die Gruppenverknüpfung  $(g, h) \mapsto gh$  und die Inversenbildung  $g \mapsto g^{-1}$  differenzierbare Abbildungen  $G \times G \mapsto G$  bzw.  $G \mapsto G$  sind [1].

Insbesondere sind die Gruppen der  $U(N)$  und der  $SU(N)$  Lie-Gruppen. Die Algebra einer Lie-Gruppe besteht aus einem Vektorraum, welcher von den Generatoren  $T_k$  der Lie-Gruppe aufgespannt wird. Für die Generatoren gilt die wichtige Kommutatorrelation:

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (8)$$

$f_{abc}$  bezeichnet man als Strukturkonstanten. Als Beispiel für eine Lie-Gruppe und die dazugehörige Algebra soll die  $SU(2)$  dienen:

Die Gruppe  $SU(2)$  ist definiert als:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\} \quad (9)$$

Eine  $SU(2)$ -Transformation ist gegeben als  $U(x) = \exp(ig \sum_k \alpha^k(x) T^k)$  ( $k = 1, 2, 3$ ), mit den Generatoren  $T^k$  der  $SU(2)$  Gruppe und ortsabhängigen Drehwinkeln  $\alpha^k(x)$ . Eine Darstellung der Generatoren kann beispielsweise mit Hilfe der Pauli-Matrizen  $\sigma$  erfolgen:  $T_k = \frac{1}{2} \sigma_k$ .

Die Lie-Algebra der  $SU(2)$  ergibt sich zu  $[T^i, T^j] = i\epsilon^{ijk}T^k$ , wobei  $\epsilon_{ijk}$  den total antisymmetrischen Tensor dritter Stufe bezeichnet.

Für den allgemeinen Fall der  $SU(N)$  lässt sich die Transformation  $U(\alpha(x))$  analog zum Fall der  $SU(2)$  schreiben als:

$$U(x) = \exp \left( ig \sum_{k=1}^{N^2-1} \alpha^k(x) T^k \right) \quad \text{mit} \quad UU^\dagger = \mathbb{1} \quad \text{und} \quad \det(U) = 1. \quad (10)$$

Wie im Falle der  $SU(2)$  gibt es auch hier eine universelle Kopplungskonstante  $g$ , sodass alle Generatoren  $T^k$  gleichwertig behandelt werden. Die Summe in der Exponentialdarstellung läuft bis  $N^2 - 1$ , da die Gruppe  $SU(N)$  den Rang  $N^2 - 1$  und folglich eben so viele Generatoren besitzt.

Anhand der freien Dirac-Lagrangefunktion wird im Folgenden das Transformationsverhalten aller Größen unter der  $SU(N)$ -Transformation  $U(x)$  herausgestellt. Man fordert abermals die Invarianz der Lagrangefunktion unter  $SU(N)$ -Transformationen, sowie die Transformation der Spinorfelder in bereits bekannter Weise:

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow \psi'(x) = U(x)\psi(x) \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x)U^\dagger(x) \end{aligned} \quad (11)$$

Mittels der Eichfelder  $W_\mu \equiv W_\mu^k T^k, k = 1, \dots, N^2 - 1$  (um Verwechslungen zu vermeiden werden die Eichfelder im abelschen Fall mit  $A_\mu$ , im nichtabelschen Fall mit  $W_\mu$  bezeichnet) lässt sich auch im Falle der  $SU(N)$ -Transformation eine kovariante Ableitung definieren:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + igW_\mu \quad (12)$$

Diese Definition ist völlig analog zum abelschen Fall. Um Eichinvarianz der Dirac-Lagrangefunktion zu erreichen, wird gefordert, dass sich  $D_\mu\psi$  wie  $\psi$  selbst transformiert:

$$\begin{aligned} D_\mu\psi &\rightarrow D'_\mu\psi' = U(D_\mu\psi) \\ &\Leftrightarrow D'_\mu U\psi = UD_\mu\psi \end{aligned} \quad (13)$$

Da diese Relation für beliebige Spinoren  $\psi$  gültig sein soll, lässt sich aus ihr das Transformationsverhalten der kovarianten Ableitung entnehmen:

$$D'_\mu = UD_\mu U^\dagger \quad (14)$$

Dieses Transformationsverhalten garantiert die Eichinvarianz der Dirac-Lagrangefunktion und legt zudem das Transformationsverhalten der Eichfelder  $W_\mu$  fest:

$$\begin{aligned} D'_\mu\psi' &= (\partial_\mu + igW'_\mu)U\psi \\ &= U(\partial_\mu\psi) + (\partial_\mu U)\psi + igW'_\mu U\psi \\ &\stackrel{!}{=} UD_\mu\psi \\ &= U(\partial_\mu + igW_\mu)\psi \\ \Leftrightarrow igW'_\mu U\psi &= igUW_\mu\psi - (\partial_\mu U)\psi \\ \Leftrightarrow W'_\mu &= U \left( W_\mu + \frac{i}{g}U^\dagger(\partial_\mu U) \right) U^\dagger \end{aligned} \quad (15)$$

Dieser zunächst ungewohnt erscheinende Ausdruck für das Transformationsverhalten der Eichfelder ist bei genauerer Betrachtung in völliger Analogie zur QED:

$$\begin{aligned} A'_\mu &= U \left( A_\mu + \frac{i}{g}U^\dagger(\partial_\mu U) \right) U^\dagger \\ &= e^{iq\alpha(x)}A_\mu e^{-iq\alpha(x)} + \frac{i}{g}(\partial_\mu e^{iq\alpha(x)}e^{-iq\alpha(x)}) \\ &= A_\mu - \partial_\mu\alpha(x) \end{aligned} \quad (16)$$

Auch der Feldstärketensor für die Eichfelder  $W_\mu$  kann analog zur QED definiert werden:

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^k T^k \quad (17)$$

Um eine explizite Darstellung des Feldstärketensors zu erhalten, lohnt sich ebenfalls ein Vergleich mit dem abelschen Fall. In der QED gilt:

$$F_{\mu\nu} = -\frac{i}{q} [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \overbrace{iq[A_\mu, A_\nu]}{=0} \quad (18)$$

Im nichtabelschen Fall jedoch kommutieren die Eichfelder nicht mehr untereinander, da sie die nichtkommutierenden Generatoren der  $SU(N)$  enthalten. Dadurch ergibt sich im nichtabelschen Fall folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
F_{\mu\nu} &= -\frac{i}{g} [W_\mu, W_\nu] \\
&= \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + ig [W_\mu, W_\nu] \\
&= \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu + ig W_\mu^a W_\nu^b [T^a, T^b] \\
&= \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - gf^{abc} W_\mu^a W_\nu^b T^c
\end{aligned} \tag{19}$$

Die letzte Zeile folgt hier aus der definierenden Kommutatorrelation der  $SU(N)$  Lie-Algebra. Um auch die Eichinvarianz des kinetischen Terms überprüfen zu können, betrachtet man zunächst das Transformationsverhalten des Feldstärketensors:

$$\begin{aligned}
F'_{\mu\nu} &= -\frac{i}{g} [D'_\mu, D'_\nu] \\
&= -\frac{i}{g} (UD_\mu U^\dagger UD_\nu U^\dagger - UD_\nu U^\dagger UD_\mu U^\dagger) \\
&= -\frac{i}{g} (UD_\mu D_\nu U^\dagger - UD_\nu D_\mu U^\dagger) \\
&= UF_{\mu\nu} U^\dagger
\end{aligned} \tag{20}$$

Würde man im nichtabelschen Fall den kinetischen Term schreiben als  $\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ , so wäre dieser nicht invariant unter  $SU(N)$ -Transformationen:

$$\begin{aligned}
F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} &= UF_{\mu\nu} U^\dagger UF^{\mu\nu} U^\dagger \\
&= UF_{\mu\nu} F^{\mu\nu} U^\dagger \\
&\neq F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{21}$$

Aufgrund dessen wird im nichtabelschen Fall der kinetische Term geschrieben als  $\mathcal{L} = -\frac{1}{2} Tr (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$ . In dieser Form ist der kinetische Term invariant unter  $SU(N)$ -Transformationen:

$$\begin{aligned}
Tr (F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu}) &= Tr (UF_{\mu\nu} U^\dagger UF^{\mu\nu} U^\dagger) \\
&= Tr (U^\dagger UF_{\mu\nu} F^{\mu\nu} U) \\
&= Tr (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})
\end{aligned} \tag{22}$$

In der zweiten Zeile wurde ausgenutzt, dass die Spur über mehrere  $n \times n$  Matrizen invariant unter zyklischer Vertauschung ebendieser ist. Zudem lässt sich diese Darstellung in eine zur QED analoge Darstellung umschreiben:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} Tr (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) &= -\frac{1}{2} Tr (F_{\mu\nu}^j T^j F^{k,\mu\nu} T^k) \\
\text{mit } Tr (T^a T^b) &= \frac{1}{2} \delta_{ab} \text{ folgt:} \\
-\frac{1}{2} Tr (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^k F^{k,\mu\nu}
\end{aligned} \tag{23}$$

Die volle Dirac-Lagrangefunktion  $\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi - \frac{1}{2}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$  ist somit invariant unter generellen SU(N)-Transformationen. Aus der expliziten Darstellung des Feldstärketensors lässt sich zudem eine interessante Eigenschaft nichtabelscher Eichtheorien ablesen:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} &= 2\partial_\mu W_\nu \partial^\mu W^\nu - 2\partial_\mu W_\nu \partial^\nu W^\mu \\ &\quad - 2(\partial_\mu W^\nu) g f^{abc} W^{a,\mu} W^{b,\nu} T^c \\ &\quad + 2(\partial_\nu W^\mu) g f^{abc} W^{a,\mu} W^{b,\nu} T^c \\ &\quad + g^2 f^{abc} f^{ijk} W_\mu^a W_\nu^b T^c W^{i,\mu} W^{j,\nu} T^k \end{aligned} \quad (24)$$

Aufgrund der nichtkommutierenden Generatoren ergeben sich im kinetischen Term Selbstwechselwirkungen der Eichbosonen in Form von trilinearen und quadrilinearen Termen der Eichfelder  $W_\mu$ . Dies ist eine zentrale Vorhersage für physikalische Theorien mit nichtabelschen Eichsymmetrien.

## 4 Flavour-Darstellung vs QCD

Entgegen der bis dato gültigen Vorstellung, Protonen und Neutronen seien fundamentale Teilchen, wurde gegen Ende der Fünfziger Jahre aus einer Vielzahl von Streuexperimenten ersichtlich, dass die Nukleonen aus kleineren Konstituenten aufgebaut waren, welche man später als Quarks bezeichnete. Eine entsprechende Anpassung des ursprünglichen Isospin-Modells der Nukleonen erfolgte durch die Ersetzung

$$\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \quad (25)$$

mit den up- und down-Quarks  $u, d$ . Da die Massen der beiden Quarks annähernd gleich sind ( $m(u) \approx 2\text{MeV}/c^2$ ,  $m(d) \approx 5\text{MeV}/c^2$ ), ist die Annahme einer Isospin-Symmetrie gerechtfertigt. Die geringe Massendifferenz vermutete man aufgrund der unterschiedlichen elektromagnetischen Wechselwirkung der beiden Teilchen ( $q(u) = +\frac{2}{3}e$ ,  $q(d) = -\frac{1}{3}e$ ). Dennoch gelang es nicht alle bisher entdeckten Hadronen in ein der SU(2)-Isospin-Symmetrie entsprechendes Schema einzuordnen, beziehungsweise zu erklären, warum manche Zustände nicht von real existierenden Teilchen besetzt wurden. Zudem verhielten sich einige Teilchen in Beschleunigerexperimenten anders als vorhergesagt. Beispielsweise war die Lebensdauer der in der kosmischen Höhenstrahlung entdeckten Kaonen deutlich größer als erwartet. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen wurde eine neue Quantenzahl, genannt "Strangeness" von Murray Gell-Mann eingeführt, welche unter der starken Wechselwirkung erhalten sein sollte, nicht jedoch unter der schwachen Wechselwirkung über die der Zerfall der Kaonen erfolgt. Dadurch waren Gell-Mann und Yuval Ne'eman in der Lage die Anordnung der Mesonen und Baryonen in Oktetts und Dekupletts zu erklären und sagten zudem korrekt die Eigenschaften des bis dahin noch nicht entdeckten  $\Omega^-$ -Baryons voraus. Als Beispiel für ein Oktett findet sich in der folgenden Abbildung die Darstellung der Baryonen mit Spin 1/2:

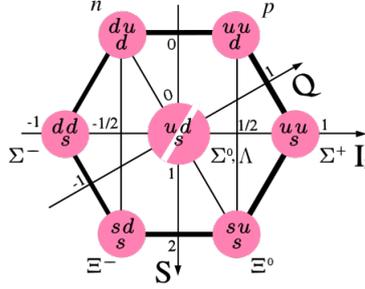


Abbildung 1: Das Baryonen-Oktett mit Spin 1/2 [2]

Auf der horizontalen Achse ist die dritte Komponente des Isospins  $I_3$  aufgetragen, auf der vertikalen Achse die Strangeness  $S$ . Die dritte Achse zeigt die elektrische Ladung der Baryonen an.

Das als "Eightfold Way" bezeichnete Modell wurde von Gell-Mann im Jahre 1964 zum Quark-Modell mit den drei Quarks up, down und strange erweitert. Trotz der Eleganz und breiten Anwendbarkeit dieses Modells, bei dem das Isospin-Dublett aus up- und down-Quarks auf ein "Flavour"-Triplet mit den Flavours up, down und strange erweitert wurde, ergaben sich einige Probleme. Zum einen ist die für up- und down-Quarks noch annähernd erfüllte Symmetrie aufgrund der großen Masse des strange-Quarks ( $m(s) \approx 95 \text{ MeV}/c^2$ ) weit weniger exakt. Aufgrund dessen erfüllt das Flavour-Triplett

$$\begin{pmatrix} u \\ d \\ s \end{pmatrix} \quad (26)$$

die angenommene  $SU(3)_{\text{flavour}}$ -Symmetrie nicht exakt. Zudem ist die Flavour-Symmetrie keine Eichtheorie, da Austauschteilchen im Falle von Eichtheorien zunächst masselos sein müssen. Ein Term ähnlich dem Massenterm  $m\bar{\psi}\psi$  der Fermionen wäre gemäß

$$mW'_\mu W'^\mu = mU \left( W_\mu + \frac{i}{g} U^\dagger (\partial_\mu U) \right) U^\dagger U \left( W^\mu + \frac{i}{g} U^\dagger (\partial^\mu U) \right) U^\dagger \neq mW_\mu W^\mu \quad (27)$$

nicht eichinvariant. Die Austauschteilchen der Flavour-Symmetrien jedoch sind nachweislich massiv (beispielsweise die Pionen). Noch schwerwiegender ist jedoch, dass einige Hadronen durch die  $SU(3)_{\text{flavour}}$ -Symmetrie nicht korrekt beschrieben werden können. Eines der prominentesten Beispiele ist das mit  $\Delta^{++}$  bezeichnete Delta-Baryon. Die elektrische Ladung von  $+2e$  ergibt sich aus der Zusammensetzung aus drei up-Quarks, was eine symmetrische Flavour-Wellenfunktion impliziert. Im Grundzustand besitzt das  $\Delta^{++}$  einen Bahndrehimpuls von  $J = 0$ , folglich ist die Ortsraumwellenfunktion symmetrisch. Der Spin von  $+3/2$  bedeutet des weiteren, dass auch die Spins parallel, also symmetrisch angeordnet sein müssen. Obwohl der halbzahlige Spin das  $\Delta^{++}$  als Fermion ausweist, scheint dieses aufgrund der symmetrischen Orts-, Flavour- und Spinwellenfunktionen der Bose-Einstein Statistik zu gehorchen. Diese Verletzung des Spin-Statistik-Theorems kann durch die Einführung einer neuen Quantenzahl aufgelöst werden, deren entsprechende Wellenfunktion antisymmetrisch konstruiert wird. Oscar Greenberg bezeichnete diese Quantenzahl später als "Farben" (Colors) in Anlehnung an die additive Farbmischung, da in der Natur keine freien Farbladungen beobachtet werden. Diesen Umstand bezeichnet man als "Confinement". Hadronen müssen folglich insgesamt farbneutral, also "weiß" sein, mathematisch gesehen also Farbsingulets. Die entsprechenden physikalischen Teilchen sind die aus drei Quarks bestehenden Baryonen (und ihre Antiteilchen

bestehend aus drei Antiquarks), sowie die aus Quark und Antiquark gebildeten Mesonen. Daher wurde vermutet, dass es drei Farbfreiheitsgrade, genannt 'rot', 'grün' und 'blau', gibt. Farbneutralität kann erreicht werden durch die Kombination von drei verschiedenfarbigen Quarks (rot, grün, blau), drei Antiquarks (antirod, antigrün, antiblau) oder der Kombination zweier Quarks mit einer Farbe und der entsprechenden Antifarbe.

Um die korrekte Eichgruppe der Farbsymmetrie zu finden, mussten folgende Bedingungen erfüllt sein: Die Darstellung der Symmetriegruppe sollte eine dreidimensionale, irreduzible Darstellung haben, da von drei Farbfreiheitsgraden ausgegangen wurde, sie musste komplex sein um auch Antiteilchen beschreiben zu können und ihre Darstellung musste Singulett-Zustände beinhalten, um die Farbneutralität der Hadronen erklären zu können. Die einzige Lie-Gruppe die diesen Forderungen entspricht ist die  $SU(3)$ . Folglich wird die Symmetriegruppe der starken Kernkraft als  $SU(3)_{color}$  bezeichnet, die zugehörige Quantenfeldtheorie als Quantenchromodynamik (QCD).

Auch experimentell wurde nach Hinweisen für die vermuteten Farbladungen und die Anzahl ihrer Freiheitsgrade gesucht. Man betrachtete dazu die Verhältnisse verschiedener Wirkungsquerschnitte in Beschleunigerexperimenten, beispielsweise die Myonen-Paarerzeugung  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  ( $\sigma_1$ ) und die Erzeugung von Quark-Antiquark-Paaren aus Elektron-Positron-Kollisionen  $e^+e^- \rightarrow q_i\bar{q}_i$  ( $\sigma_2$ ). Der Wirkungsquerschnitt der zweiten Reaktion sollte sensitiv auf die Anzahl der Farbladungen sein, während die erste Reaktion vollständig durch die QED beschrieben wird, deren Kopplungskonstanten und weitere Parameter sehr genau vermessen wurden. Bildet man nun das Verhältnis dieser beiden Reaktionen so gelangt man zu dem Ergebnis, dass dieses nur noch von der elektrischen Ladung der erzeugten Quarks und der Anzahl der Flavours abhängt. Letztere ergibt sich direkt aus der Energie im Schwerpunktsystem, da bei zu geringer Energie schwere Quarks nicht erzeugt werden können. Der theoretisch zu erwartende Wert  $R_{th}$  ergibt sich folglich zu:

$$R_{th} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\alpha^2 \sum_i Q_i^2}{\alpha} = \sum_i Q_i^2 \quad , \quad i \hat{=} \text{flavour} \quad (28)$$

$\alpha$  ist hier die Kopplungskonstante der elektromagnetischen Wechselwirkung,  $Q_i$  die elektrische Ladung der Quarks mit Flavour  $i$ . Bei einer Energie von etwa 10 GeV im Schwerpunktsystem werden up-, down-, strange-, charm- und bottom-Quarks erzeugt. Da die elektrische Ladung aller Quark-Flavours bekannt ist, errechnet man leicht für den theoretisch zu erwartenden Wert:

$$R_{th} = \frac{11}{9} \quad (29)$$

In Experimenten wurde folgendes Verhalten von  $R$  gefunden:

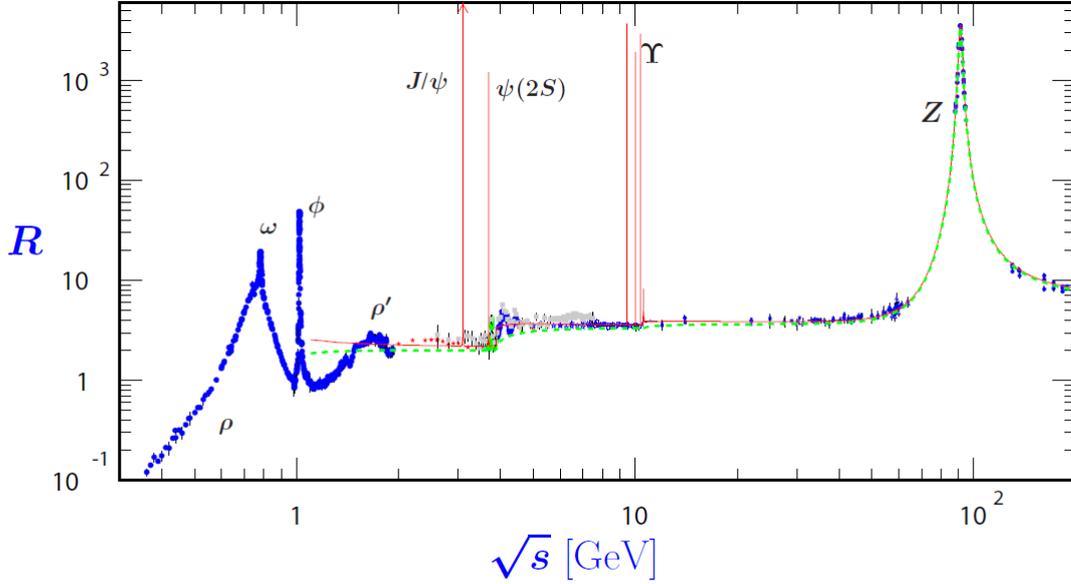


Abbildung 2: Experimentell gefundenes Verhalten von  $R$ , aufgetragen gegen die Schwerpunktsenergie [3]

In der obigen Abbildung zeigen sich diverse Peaks, die Resonanzen und Anregungen verschiedener Teilchen entsprechen. Diese sind hier jedoch nicht weiter von Interesse. Man erkennt jedoch, dass der Wert von  $R$  für ansteigende Energien im Schwerpunktsystem (hier mit  $\sqrt{s}$  bezeichnet) mehrere "Stufen" durchläuft (gekennzeichnet durch gestrichelte Linien), diese entsprechen den Energien bei denen zusätzliche Quark-Flavours erzeugt werden. Für eine Energie von etwa 10 GeV liest man den Wert  $R_{exp} \approx 11/3$  ab, was dem Dreifachen des theoretisch zu erwartenden Werts entspricht. Dies lässt sich interpretieren als ein vergrößerter Phasenraum der Quark-Antiquark Produktion, was auf zusätzliche, von außen nicht ersichtliche Freiheitsgrade hinweist. Dies ist ein starkes Indiz für Farbladungen, deren theoretisch vermutete Anzahl  $N_c = 3$  durch derartige Messungen bestätigt werden konnte.

## 5 QCD als Eichtheorie

Mit der Darstellung

$$\psi_i = \begin{pmatrix} q_i^{red} \\ q_i^{green} \\ q_i^{blue} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad q = \text{Quark}, \quad i \hat{=} \text{flavour} \quad (30)$$

ist es möglich eine Lagrangefunktion für die QCD zu konstruieren. Diese nimmt eine Form analog zur QED an:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= \sum_{i,c} \bar{\psi}_{i,c}(x) (i\gamma^\mu D_\mu - m_i) \psi_{i,c}(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} \\ &= \sum_{i,c} \bar{\psi}_{i,c}(x) \left( i\gamma^\mu \left( \partial_\mu - ig \frac{\lambda^a}{2} W_\mu^a(x) \right) - m_i \right) \psi_{i,c}(x) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a,\mu\nu} \end{aligned} \quad (31)$$

$i$  bezeichnet hier den Flavour-Index,  $c$  den Farbindex, über beide Indizes wird explizit summiert.  $W_\mu^a$  bezeichnet hier die kovarianten Viererpotentiale der Gluonen, welche die Eichbosonen der starken Kernkraft sind ( $F_{\mu\nu}^a$  bezeichnet den Feldstärketensor der Gluonen). Die Generatoren der  $SU(3)_{color}$ -Symmetriegruppe sind die Gell-Mann Matrizen multipliziert mit  $1/2$ , welche hier mit  $\lambda^a$ ,  $a = 1, \dots, 8$  bezeichnet werden.

Wie von einer nichtabelschen Eichtheorie erwartet, treten im kinetischen Term der Gluonen trilineare und quadrilineare Terme der Eichfelder auf, was zu Selbstwechselwirkungen der Gluonen in Form von Drei- und Vierpunktvertizes führt. In der folgenden Abbildung findet sich eine piktografische Darstellung dieser Vertizes in Form von Feynman-Diagrammen:

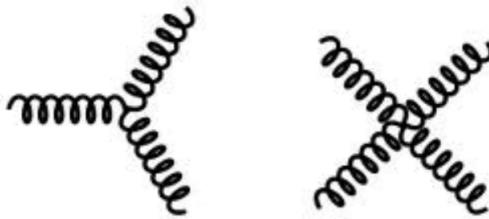


Abbildung 3: Drei- und Vier-Gluonen Vertizes, resultierend aus der Selbstwechselwirkung der Gluonen [4]

Diese Selbstwechselwirkung der Gluonen ist die Ursache für eine Vielzahl interessanter Effekte, unter anderem des Confinements der Quarks in Hadronen (freie Farbladungen werden nicht beobachtet). Obwohl noch nicht explizit theoretisch bewiesen, stellt das Confinement doch einen experimentell belegten Fakt dar (zumindest im Niederenergiebereich der Theorie). Versucht man beispielsweise ein Meson bestehend aus einem Quark und einem Antiquark zu separieren, so entstehen keine freien Quarks mit freier Farbladung, sondern es bilden sich bei entsprechend hoher Energiezufuhr zwei oder mehrere Mesonen aus. Anschaulich lässt sich dies wie folgt erklären: Quark und Antiquark wechselwirken über ein Farbladungsfeld aus Gluonen miteinander. Da diese jedoch ebenfalls Farbladung tragen wechselwirken sie auch miteinander, was dazu führt, dass sich ein räumlich eng begrenztes Farbladungsfeld ausbildet, illustriert in der folgenden Abbildung:

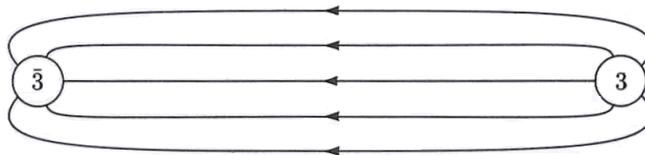


Abbildung 4: Illustration zur Eichfeldkonfiguration zwischen Quark (3) und Antiquark ( $\bar{3}$ ) im Niederenergiebereich der QCD [5]

Im Niederenergiebereich der QCD ist deren Kopplungskonstante groß was dazu führt, dass der "Flussschlauch" aus Farbladungen zwischen Quark und Antiquark eine feste Energiedichte hat. Versucht man nun das Quark-Antiquark-Paar zu separieren wird der Flussschlauch länger und zieht sich gleichzeitig auf einen infinitesimal dünnen Faden ("String") zusammen. Aufgrund dessen wächst das Potential zwischen Quark und Antiquark linear mit dem Abstand  $r$  an und man müsste unendlich viel Energie aufbringen um beide voneinander zu separieren. Energetisch ist es weit günstiger ein weiteres Quark-Antiquark-Paar aus dem Vakuum zu erschaffen, welches an das bereits vorhandene Paar bindet und deren Farbladung abschirmt. Dies ist möglich sobald die potentielle Energie gleich der Masse des neuen Quark-Antiquark-Paars ist. Da die Farbladungen aller Quarks und

Antiquarks nun abgeschirmt sind, verschwindet der Flussschlauch und es bleiben zwei schwach miteinander wechselwirkende Mesonen zurück. Diesen Vorgang bezeichnet man daher auch als "String Breaking". Er vermag zudem die experimentell beobachtete Kurzreichweitigkeit der starken Wechselwirkung zu erklären. Obwohl man aufgrund der Masselosigkeit der Gluonen zunächst von einer unendlich reichweitigen Kraft, analog zur elektromagnetischen Kraft, ausgehen würde, können keine längerreichweitigen Wechselwirkungen auftreten, da aufgrund der Selbstwechselwirkung der Gluonen die potentielle Energie zwischen weit entfernten Farbladungen bereits so groß wäre, dass String Breaking auftritt.

Sowohl Rechnungen im Rahmen der Gitter-Feldtheorie, bei der Materie- und Eichfelder auf ein diskretes Raum-Zeit-Gitter übertragen werden, als auch im Rahmen von Störungsrechnungen höherer Ordnung zeigen in der Tat ein lineares Verhalten des Quark-Antiquark-Potentials  $V(r)$  für größere Abstände. In der folgenden Abbildung sind die Ergebnisse dreier Arbeitsgruppen zusammengefasst:

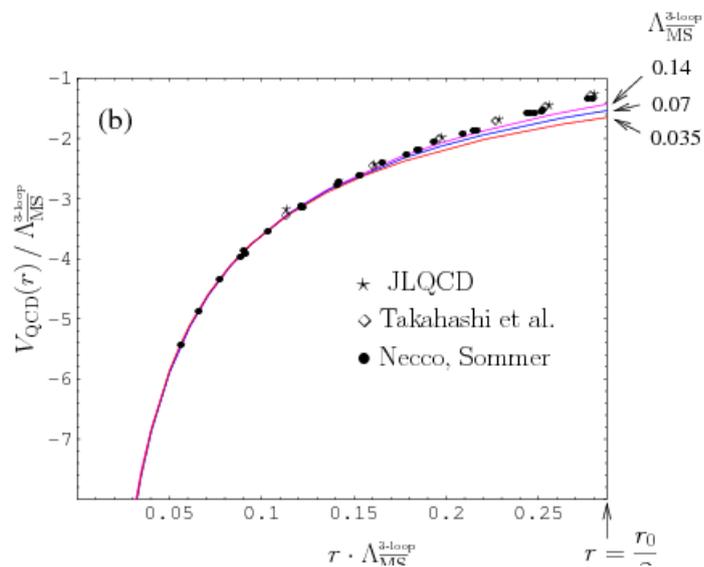


Abbildung 5: Das Quark-Antiquark-Potential der QCD  $V_{QCD}(r)$  aufgetragen gegen den Abstand  $r$  [6]

In Hochenergiekollisionen von Protonen und schwereren Kernen beobachten man die Ausbildung ganzer Schauer oder "Jets" von Hadronen. Hierbei bilden sich nach der Kollision eine Vielzahl recht kurzlebiger Teilchen, welche auf diversen Wegen zerfallen. Wiederholt werden dabei einzelne Quarks abgespalten, welche über den Mechanismus der Paarerzeugung Farbladungsneutralität erlangen und als zusätzliche Hadronen detektiert werden. Da Quarks und Antiquarks stets nur als Paare erzeugt werden, sollten in derartigen Beschleunigerexperimenten stets nur gerade Anzahlen von Jets detektiert werden, falls nur Quarks an der Reaktion beteiligt sind. Eine ungerade Anzahl an Jets interpretiert man als Aussendung eines Gluons analog zur "Bremsstrahlung" elektrisch geladener Teilchen. Ein freies Gluon darf aufgrund seiner Farbladung nicht frei existieren und würde durch Wechselwirkung mit anderen Reaktionsprodukten ebenfalls in einen Jet von Hadronen zerfallen. Tatsächlich hat man in Beschleunigerexperimenten ungerade Anzahlen von Hadronenjets gefunden, was eine starke Evidenz für die tatsächliche Existenz der Gluonen darstellt. Eine Aufnahme eines Drei-Jet-Events findet sich in der folgenden Abbildung:

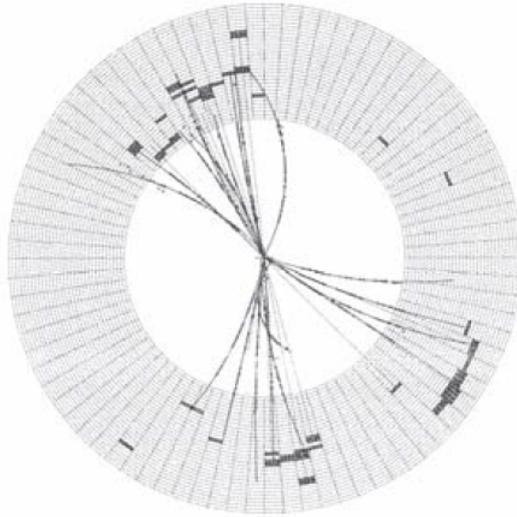


Abbildung 6: Aufnahme eines Drei-Jet-Events durch den JADE Detektor des PETRA-Experiments [7]

Ein weiterer interessanter Aspekt der QCD ist der Effekt der sogenannten asymptotischen Freiheit. Dies bezeichnet die Verringerung der QCD-Kopplungskonstante  $\alpha_s$  mit zunehmender Energie. Da eine hohe Energie äquivalent zu kleinen Längenskalen ist, nimmt die effektive Farbladung folglich bei kleinen Längenskalen ab. In der QED beobachtet man genau das entgegen gesetzte Verhalten. Hier nimmt die Kopplungskonstante  $\alpha$  bei hohen Energien zu und die effektive elektrische Ladung eines Teilchens steigt auf kleineren Längenskalen. Dieses Verhalten lässt sich durch Vakuumfluktuationen erklären, bei denen in der Nähe einer elektrischen Ladungsquelle fortlaufend virtuelle Fermion-Antifermion-Paare mit entgegengesetzter elektrischer Ladung entstehen und wieder vernichtet werden. Diese existieren nur innerhalb der von der Energie-Zeit-Unschärfe erlaubten Dauer, welche jedoch ausreicht, dass sich die Paare als elektrische Dipole im elektrischen Feld der realen Ladung ausrichten und dieses somit abschwächen. Die reale elektrische Ladung wird somit abgeschirmt und zwar umso stärker je weiter man von ihr entfernt ist (mehr virtuelle Dipole zwischen realer Ladung und Testsonde). Diesen Effekt bezeichnet man daher auch als "Screening". Für die QCD würde man intuitiv einen analogen Effekt erwarten. In der Tat tritt dieser auch für virtuelle Quark-Antiquark-Paare auf, welche in der Nähe realer Farbladungen entstehen und diese abschirmen. Da jedoch die Gluonen ebenfalls Farbladungen tragen, muss man hier auch den Beitrag berücksichtigen, den virtuelle Gluonen zum Screening liefern. Mathematisch betrachtet muss man folglich die Beiträge virtueller Gluon-Loops mit einbeziehen. Entsprechende Kalkulationen zeigten, dass die Gluonen überraschenderweise einen *Anti*-Screening-Effekt von realen Farbladungen bewirken, welcher den Screening-Effekt der virtuellen Quark-Antiquark-Paare überwiegt. Die effektive Farbladung nimmt somit bei kleineren Längenskalen ab, was der Verringerung der starken Kopplungskonstante bei hohen Energien entspricht. Dieser als "asymptotische Freiheit" bezeichnete Effekt ist experimentell wohl belegt, in der unten stehenden Abbildung sind beispielhaft die Ergebnisse dreier verschiedener Beschleunigerexperimente dargestellt.

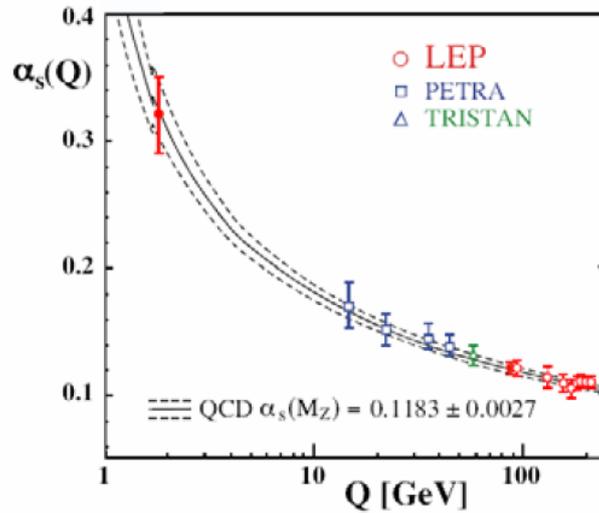


Abbildung 7: Die QCD-Kopplungskonstante  $\alpha_s$  aufgetragen gegen die Energie  $Q$  in GeV [7]

Anschaulich kann man sich den Anti-Screening-Effekt der Gluonen als 'Ausschmierung' der realen Farbladung durch deren Wechselwirkung mit einer Vielzahl virtueller farbgeladener Gluonen vorstellen. Würde man beispielsweise eine Testsonde, welche auf rote Farbladungen sensitiv ist, in die Nähe einer realen roten Farbladung bringen, so könnte diese durch die Wechselwirkung mit einem virtuellen Gluon in beispielsweise eine grüne Farbladung umgewandelt werden, während das Gluon die rote Farbladung kurzzeitig an einen anderen Ort trägt. Innerhalb eines kleinen Radius um die reale Farbladung herum ist die Wahrscheinlichkeit die rote Farbladung anzutreffen somit geringer, als innerhalb eines großen Radius.

## 6 Zusammenfassung

- Auch im nichtabelschen Fall kann die Invarianz der freien Dirac-Gleichung unter Lorentz- und Eichtransformationen gewährleistet werden.
- Prinzip der lokalen Eichinvarianz führt (analog zur QED) zu *wechselwirkender* Theorie.
- Nichtabelsche Struktur der Eichsymmetriegruppe führt zu Selbstwechselwirkung der Eichbosonen.
- Color-SU(3) Symmetrie führt zu korrekter Beschreibung der starken Wechselwirkung.
- Experimentelle Daten bestätigen die Existenz von 3 Farbladungen, sowie der Gluonen.
- Präzisionsrechnungen bestätigen Quark-Potential, welches linear mit dem Abstand zunimmt.
- Experimentelle Bestätigung des Confinements der QCD; Confinement vermag Kurzreichweitigkeit der starken Wechselwirkung zu erklären.
- Selbstwechselwirkung der Gluonen führt zu Antiscreening-Effekt und asymptotischer Freiheit.
- Neue Effekte entstehen großteils aufgrund der nichtabelschen Struktur der Eichtheorie.

## Quellen:

- [1] Internetauftritt der Universität Duisburg-Essen  
<https://www.uni-due.de/~hm0131/lie/Lie.pdf>, Stand: 16.6.2013
- [2] Internetauftritt der englischen Wikipedia, Stand: 16.6.2013  
<http://en.wikipedia.org/wiki/Isospin>
- [3] Internetauftritt der Particle Data Group, Stand: 18.6.2013  
<http://prd.aps.org/pdf/PRD/v86/i1/e010001>
- [4] Internetauftritt von inspire hep, Stand: 18.6.2013,  
<http://inspirehep.net/record/1094861/files/3g4gvertices.png>
- [5] Peskin & Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press (2005)
- [6] Internetauftritt von inspire hep, Stand: 18.6.2013  
<http://inspirehep.net/record/837566/plots#1>
- [7] Internetauftritt der Uni Heidelberg, Stand: 18.6.2013  
<http://www.physi.uni-heidelberg.de/~uwer/lectures/ExpProbes/script/chapter-5a.pdf>
- [8] P. Schmüser, *Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker*, Springer-Verlag (1988)