# **Ausarbeitung zum Seminarvortrag:** Darstellungstheorie der Lorentzgruppe

Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

26. Juni 2013

Semir Vrana

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Einleitung

Lorentz- und Poincaré-Transformationen beschreiben Transformationen zwischen Inertialsystemen, die Raum-Zeit-Abstände invariant lassen und alle Gesetze der Physik müssen seit der Einführung der speziellen Relativitätstheorie bei Poincaré-Transformationen forminvariant bleiben.

## 1.1 Historisches

Im Zusammenhang mit dem Doppler-Effekt entwickelte Woldemar Voigt 1887 die folgenden Transformationen, bei denen die Wellengleichung invariant bleibt,

$$x' = x - vt, \qquad y' = \frac{y}{\gamma}, \qquad z' = \frac{z}{\gamma}, \qquad t' = t - \frac{xv}{c^2}. \tag{1.1}$$

Bei den Gleichungen handelt es sich noch nicht um Lorentz-Transformationen. Sie sind aber dennoch in der Elektrodynamik gültig, was auf weiteren Symmetrien der Maxwell-Gleichungen beruht.
In Arbeiten aus den Jahren 1892 und 1895 führte Hendrick Lorentz Hilfsvariablen im relativ zum Äther bewegten Bezugssystem ein,

$$x' = \gamma(x - vt), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t - \gamma^2 \frac{(x - vt)v}{c^2}. \tag{1.2}$$

Dies sind bereits die Lorentz-Transformationen. Die Transformierten Koordinaten wurden von Lorentz aber nicht als reale Objekte erachtet. Lorentz hat weiter angenommen, dass dies auch für intermolekulare Krafte gilt und gelang so zur Längenkontraktion und konnte damit das Michelson-Morley-Experiment erklären.
Henri Poincaré konnte in Arbeiten aus den Jahren 1900 und 1905 viele wichtige Eigenschaften der Lorentz-Gruppe, wie etwa die Gruppeneigenschaften oder die Invarianz die Raumzeitelements $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$ und führte dabei bereits vor Minkowski die vierdimensionale Darstellng der Raum-Zeit ein. Allerdings blieb auch bei Poincaré die transformierte Zeit eine scheinbare Ortszeit.
Erst Albert Einstein im Jahre 1905 erkannte die weitreichenden Konsequenzen der Lorentz-Transformationen, welche er aus grundlegenderen Prinzipien herleiten konnte und den transformierten Koordinaten die heutige Interpretation gab.
1939 hat Eugene Wigner die Darstellungstheorie der Poincaré-Gruppe erarbeitet, auf die unter anderem die Klassifizierung der Darstellungen nach Masse und Spin zurückgeht.

## 1.2 Relevanz in der Teilchenphysik

Der Hauptgrund für die Betrachtung der Poincaré-Gruppe im Rahmen der Teilchenphysik ist, dass als Folge der Klassifizierung der irreduziblen Darstellungen nach Masse und Spin man die Elementarteilchen als irreduzible Darstellungen der Poincaré-Gruppe interpretieren kann.

Außerdem bietet die Poincaré-Gruppe einen Ausgangspunkt für weitere Entwicklungen in der Physik, so führt etwa das Eichen der Poincaré-Gruppe zu einer Quantentheorie der Gravitation, die allerdings nicht renormierbar ist.
Nach dem Coleman-Mandula-Theorem führt das Hinzufügen von weiteren Symmetrien zur Poincarè-Gruppe zu impulsunabhängigen Wirkungsquerschnitten. D.h. die Wirkungsquerschnitte hängen nicht mehr von der Energie der beteiligten Teilchen ab und werden somit trivial. In dem Sinne kann man die Poincaré-Symmetrie als maximale Raum-Zeit-Symmetrie auffassen.
Die Poincaré-Symmetrie lässt sich dennoch erweitern, indem man zu den Raum-Zeit-Koordinaten weitere, anti-kommutierende Koordinaten hinzufügt und die Poincaré-Algebra durch Anti-Kommutator-Relationen mit Generatoren erweitert, die beide Sorten von Koordinaten mischen, dies führt zur Supersymmetrie.

# 2 Die Lorentz-Gruppe

## 2.1 Eigenschaften der Lorentz-Gruppe

Das grundlegende Postulat der speziellen Relativitätstheorie ist, dass das vierdimensionale Raum-Zeit-Element

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu\mathrm{d}x^\nu = \mathrm{d}x_\mu\mathrm{d}x^\mu \tag{2.1}$$

Bei Transformationen zwischen Inertialsystemen invariant bleibt. Dabei wurde als Konvention für den metrischen Tensor $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ verwendet. Diese Transformationen nennt man *Lorentztransformationen (Poincarétransformationen)*:

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (+ \quad b^\mu) \tag{2.2}$$

Durch Ausnutzen der Invarianz von $\mathrm{d}s^2$ erhält man

$$\mathrm{d}s'^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x'^\mu\mathrm{d}x'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\sigma\Lambda^\nu{}_\rho\mathrm{d}x^\sigma\mathrm{d}x^\rho \stackrel{!}{=} \mathrm{d}s^2 = g_{\sigma\rho}\mathrm{d}x^\sigma\mathrm{d}x^\rho. \tag{2.3}$$

$g_{\mu\nu}$ muss sich also unter LT nach

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\sigma\Lambda^\nu{}_\rho = g_{\sigma\rho} \quad \text{bzw.} \quad \Lambda^T g\Lambda = g \tag{2.4}$$

transformieren. Durch bilden der Determinante folgt

$$\det(g) = \det(\Lambda^T g\Lambda) = \underbrace{\det(\Lambda^T)}_{=\det(\Lambda)}\det(g)\det(\Lambda) = \det(g)\det{}^2(\Lambda) \stackrel{!}{=} \det(g) \tag{2.5}$$

$$\Rightarrow \det(\Lambda) = \pm 1 \tag{2.6}$$

Außerdem gilt für die 00-Komponente von (2.4)

$$1 = g_{00} = g_{\sigma\rho}\Lambda^\sigma{}_0\Lambda^\rho{}_0 = \Lambda^0_0\Lambda^0{}_0 - \Lambda^i_0\Lambda^i{}_0, \tag{2.7}$$
$$\Leftrightarrow (\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \Lambda^i_0\Lambda^i{}_0, \tag{2.8}$$
$$\Rightarrow |\Lambda^0{}_0| \geq 1. \tag{2.9}$$

Durch die Bedingungen (2.6) und (2.9) zerfällt die Lorentz-Gruppe in vier disjunkte Teilmengen (Zusammenhangskomponenten), siehe Tabelle 1. Ein Element einer der Zusammenhangskomponenten lässt sich nicht stetig zu einem Element einer anderen Komponente transformieren.

Tabelle 1: Die 4 Zweige der Lotentzgruppe

| Zweig | Bedingung | Beispiel | |
|---|---|---|---|
| $\mathcal{L}_+^\uparrow$ | $\det\Lambda = +1,\ \Lambda^0{}_0 \geq 1$ | Identität | $\mathbb{1} = \mathrm{diag}(1,1,1,1)$ |
| $\mathcal{L}_-^\uparrow$ | $\det\Lambda = +1,\ \Lambda^0{}_0 \geq 1$ | Spiegelung | $P = \mathrm{diag}(1,-1,-1,-1)$ |
| $\mathcal{L}_+^\downarrow$ | $\det\Lambda = -1,\ \Lambda^0{}_0 \leq -1$ | Zeitumkehr | $T = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ |
| $\mathcal{L}_+^\downarrow$ | $\det\Lambda = +1,\ \Lambda^0{}_0 \leq -1$ | Inversion | $PT = -\mathbb{1}$ |

Die Fälle mit $\det\Lambda = 1$ bezeichnet man als *eigentliche* LT und sonst als *uneigentliche* LT. Die Fälle $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ nennt man *orthochrone* LT und sonst *nicht-orthochrone* LT. Im Folgenden wird zunächst nur die Untergruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow$ behandelt, die die Identität enthält und damit eine Untergruppe darstellt.

## 2.2 Generatoren der Lorentz-Gruppe

Betrachte nur eine LT in der Nähe der Identität,

$$\Lambda^\mu{}_\nu = g^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\nu, \qquad \omega^\mu{}_\nu \ll 1. \tag{2.10}$$

Dabei gilt $g^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu$. Mit $g_{\sigma\rho} = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\sigma\Lambda^\nu{}_\rho = \Lambda^\mu{}_\sigma\Lambda_{\mu\rho}$ folgt durch Einsetzen des obigen Ansatzes

$$g_{\rho\sigma} = (g^\mu{}_\sigma + \omega^\mu{}_\sigma)(g_{\mu_\rho} + \omega_{\mu_\rho}) = g_{\rho\sigma} + \omega_{\rho\sigma} + \omega_{\sigma\rho} + \mathcal{O}(\omega^2_{\sigma_\rho}), \tag{2.11}$$
$$\Rightarrow \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu}. \tag{2.12}$$

Daraus folgt, dass $\omega_{\mu\nu}$ und damit auch $\Lambda_{\mu\nu}$ nur 6 freie Parameter besitzen, drei Parameter für Boosts und drei für Drehungen.
Betrachte beispielsweise einen Boost in $x$-Richtung mit Geschwindigkeit $v \in [0, c[$. Die LT ist gegeben durch

$$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},\ y' = y,\ z' = z,\ t' = \frac{t + vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.13}$$

In Matrixform nimmt die LT dann die folgende Form an,

$$L_x(v) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\phi & \sinh\phi & 0 & 0 \\ \sinh\phi & \cosh\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

Dabei ist $\beta = v/c = \tanh\phi$ und $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$. Die Größe $\phi$ wird als Rapidität bezeichnet. Sie ist die natürlichere Wahl für die Parametrisierung eines Boosts als die Geschwindigkeit $v$, da sich bei Hintereinanderausführung von Boosts die Rapidität einfach addiert, während die Geschwindigkeit ein kompliziertes Additionsgesetz hat.
Durch Differentiation in $\phi = 0$ erhält man den Generator des Boosts in $x$-Richtung.

$$K_1 = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\partial L_x(\phi)}{\partial \phi}\bigg|_{\phi=0} = -\mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.15}$$

Analog erhält man die weiteren Generatoren, die im Folgenden aufgelistet sind.

$$K_1 = -\mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad K_2 = -\mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

$$K_3 = -\mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_1 = -\mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

$$J_2 = -\mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_3 = -\mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.18}$$

Man sieht, dass die $K_i$ nicht hermitesch sind. Daraus folgt, dass die zugehörigen Transformationen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}K_i\phi}$ nicht-unitär sind. Der Grund hierfür ist, dass die Lorentz-Gruppe nicht kompakt ist.
Durch nachrechnen bestimmt man die Lie-Algebra der Lorentz-Gruppe

$$[J_i, J_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk} J_k, \qquad \text{Unteralgebra } so(3) \tag{2.19}$$

$$[K_i, K_j] = -\mathrm{i}\epsilon_{ijk} J_k, \tag{2.20}$$

$$[J_i, K_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk} K_k. \tag{2.21}$$

Man sieht, dass die $J_i$ eine Unteralgebra bilden und, dass Boosts in verschiedene Richtungen nicht kommutieren. Führt man beispielsweise nacheinander infinitesimale Boosts in $x$- und

$y$-Richtung durch und macht diese Rückgängig

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}K_1\delta\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}K_2\delta\psi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}K_1\delta\phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}K_2\delta\psi} = 1 - \underbrace{[K_1, K_2]}_{=\mathrm{i}J_3}\delta\phi\delta\psi + \mathcal{O}(\delta\phi^2\delta\psi^2), \tag{2.22}$$

so hat man in erster Ordnung eine Drehung um die z-Achse durchgeführt.
Durch die Definition der Tensors

$$(M_{\mu\nu}) = -\mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & K_1 & K_2 & K_3 \\ -K_1 & 0 & J_3 & -J_2 \\ -K_2 & -J_3 & 0 & J_1 \\ -K_3 & J_2 & -J_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.23}$$

lässt sich die Lorentz-Algebra in einer einzelnen Gleichung darstellen,

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -\mathrm{i}(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}). \tag{2.24}$$

Für $M^{\mu\nu}$ kann man die allgemeine Form

$$(M^{\mu\nu})^{\rho}{}_{\sigma} = \mathrm{i}(g^{\mu\rho}g^{\nu}{}_{\rho} - g^{\nu\rho}g^{\mu}{}_{\sigma}) \tag{2.25}$$

finden. Diese gilt auch allgemein für die Pseudo-Orthogonale Gruppe in beliebigen Dimensionen, $O(m,n) := \{\Lambda \in GL(m+n) |\ g = \Lambda^T g \Lambda\}$ mit $g = \mathrm{diag}(\underbrace{1, ..., 1}_{m\text{-Mal}}, \underbrace{-1, ..., -1}_{n\text{-Mal}})$.

## 2.3 Universelle Überlagerung

Die universelle Überlagerungsgruppe ist eine einfach zusammenhängende Lie-Gruppe, die sich lokal wie die überlagerte Gruppe verhält. Die formale Definition lautet

**Definition 1** (Universelle Überlagerungsgruppe)**.** Sei $G$ eine Lie-Gruppe. Eine universelle Überlagerungsgruppe von $G$ ist eine einfach zusammenhängende Lie-Gruppe $\tilde{G}$, zusammen mit einem Homomorphismus $\phi : \tilde{G} \to G$, der folgende Eigenschaften hat

(i) $\phi$ ist surjektiv

(ii) Es exisitiert eine offene Umgebung $U$ von $\mathbb{1} \in \tilde{G}$, die durch $\phi$ homöomorph auf eine offene Umgebung $V$ von $\mathbb{1} \in G$ abgebildet wird.

Aus (ii) folgt, dass die Lie-Agebren beider Gruppen die gleiche Lie-Algebra besitzen.
Im Folgenden soll nun eine solche Überlagerungsabbildung von der $S(2,\mathbb{C})$ auf $\mathcal{L}_+^\uparrow$ konstruiert werden. Die $SL(2,\mathbb{C})$ ist definiert als

$$SL(2,\mathbb{C}) = \{A \in GL(2,\mathbb{C}),\ \det A = 1\} \tag{2.26}$$

Die Matrizen aus dieser Gruppe haben 8 Parameter, die 2 Bedingungen genügen müssen, also 6 freie Parameter, genauso wie die Lorentz-Gruppe. Man führt nun die Matrizen $\sigma^\mu$ und $\tilde{\sigma}^\mu$ ein,

$$\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \sigma^i), \tag{2.27}$$

$$\tilde{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\sigma^i). \tag{2.28}$$

Für diese Matrizen gilt

$$\{\sigma^\mu, \tilde{\sigma}^\nu\} = \{\tilde{\sigma}^\mu, \sigma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}, \tag{2.29}$$

$$\operatorname{Tr} \sigma^\mu \tilde{\sigma}^\nu = 2g^{\mu\nu}. \tag{2.30}$$

Man bildet nun über die Abbildung

$$x^\mu \longmapsto X = x^\mu \sigma_\mu = \begin{pmatrix} x^0 - x^3 & -x^1 + \mathrm{i}x^2 \\ -x^1 - \mathrm{i}x^3 & x^0 + x^3 \end{pmatrix} \tag{2.31}$$

Vierevektoren auf $2 \times 2$-Matrizen ab. Für die Matrizen gilt

$$\det X = x^\mu x_\mu, \qquad \operatorname{Tr} X = 2x^0.$$

Die Determinante entspicht also dem Betragsquadrat von $x^\mu$. Man findet als Umkehrbbildung

$$X \longmapsto x^\mu = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(X\tilde{\sigma}^\mu). \tag{2.32}$$

$X$ transformiert sich unter $A \in SL(2, \mathbb{C})$ nach

$$X' = AXA^\dagger \tag{2.33}$$

Die Determinante transformiert sich dabei nach

$$(x^\mu x_\mu)' = \det X' = \det A \det X \det A^\dagger = \det X = x^\mu x_\mu. \tag{2.34}$$

Das Produkt $x^\mu x_\mu$ bleibt also invariant, es handelt sich hierbei also um eine Lorentz-Transformation. Mit der Umkehrabbildung (2.32) erhält man für die Transformation von $x^\mu$ unter $SL(2, \mathbb{C})$

$$(x^\mu)' = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(X'\tilde{\sigma}^\mu) = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{Tr} \left( A\sigma_\nu A^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \right) \right] x^\nu \overset{!}{=} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.35}$$

und durch Vergleich die Lorentz-Transformation

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \left( A\sigma_\nu A^\dagger \tilde{\sigma}^\mu \right). \tag{2.36}$$

Dies ist die gesuchte Überlagerungsabbildung. Die $SL(2, \mathbb{C})$ ist einfach zusammenhängend, also wirklich die universelle Überlagerung. Man müsste genaugenommen noch die Bedingungen (i) und (ii) aus Definition 1 nachweisen.
Man erkennt an der Abbildung, das $A$ und $-A$ auf das gleiche $\Lambda^\mu{}_\nu$ abgebildet werden. Man spricht deshalb von zweifacher Überlagerung und schreibt $\mathcal{L}_+^\uparrow \cong SL(2, \mathbb{C})/\{\mathbb{1}, -\mathbb{1}\}$.

# 3 Grundlagen der Darstellungstheorie

## 3.1 Definitionen

Im Folgenden sollen einige Definitionen aufgelistet werden, die benötigt werden, um die Begriffe „irreduzibel“ und „reduzibel“ zu definieren.

**Definition 2** (Homomorphismus)**.** Eine Abbildung $\phi : G \to H$ zwischen Gruppen heißt *Homomorphismus*, falls

$$\phi(g_1)\phi(g_2) = \phi(g_1 g_2)\ \forall g_1, g_2 \in G \tag{3.1}$$

Falls $\phi$ zusätzlich noch bijektiv ist, spricht man von Isomorphismus und im Fall $G = H$ von Automorphismus $G = H$ nennt man $\phi$ Automorphismus.

**Definition 3** (Darstellung einer Lie-Gruppe)**.** Sei $V$ ein endlichdimensionaler Vektorraum. Eine Darstellung $\Pi$ einer Lie-Gruppe $G$ ist ein Homomorphismus

$$\Pi : G \to GL(V) \tag{3.2}$$

Es wird jedem Element der Gruppe also eine Matrix zugeordnet, so dass die Gruppenverknüpfung erhalten bleibt.

**Definition 4** (Irreduzible Darstellung)**.** Sei $G$ eine Lie-Gruppe, $\Pi$ eine Darstellung, die auf $V$ wirkt.

(i) $W \subset V$ heißt *invariant*, falls $\Pi(g)w \in W\ \forall w \in W,\ g \in G$

(ii) Eine invariante Teilmenge $W$ heiß *nicht-trivial*, falls $W \neq \{0\}$ und $W \neq V$

(iii) Eine Darstellung ohne nicht-triviale, invariante Teilmengen heißt *irreduzibel*

Die Begriffe aus dieser Definition sollen nun an einem einfachen Beispiel verdeutlicht werden.

**Beispiel 1.** Sei etwa $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \{(v_1, v_2, 0) \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^3$ und habe das Gruppenelement $g \in G$ die Darstellung

$$\Pi(g) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Dann gilt für ein beliebiges $v = (v_1, v_2, 0) \in W$, dass $\Pi(g)v = (v_1 + 2v_2, 3v_3 + 4v_4, 0) \in W$ ebenfalls aus $W$ ist. Falls dies für die Darstellungen aller Gruppenelemente aus $G$ gilt, so ist $W$ ein invarianter Unterraum von $V$. Die Darstellung besäße dann einen invarianten Unterraum und wäre nicht irreduzibel.

Die Begriffe invariant, nicht-trivial und irreduzibel sind analog für Lie-Algebren definiert.

**Definition 5** (Äquivalente Darstellungen)**.** Zwei Darstellungen $\Pi, \tilde{\Pi}$ heißen äquivalent, falls eine reguläre Matrix $S$ existiert, mit

$$\tilde{\Pi}(g) = S\Pi(g)S^{-1} \tag{3.4}$$

**Definition 6** (Direkte Summe von Darstellungen)**.** Seien $\Pi_1, ..., \Pi_n$ Darstellungen der Lie-Gruppe $G$, die auf $V_1, ..., V_n$ wirken. Dann ist die direkte Summe $\Pi_1 \oplus ... \oplus \Pi_n$ eine Darstellung von $G$, die auf $V_1 \oplus ... \oplus V_n$ wirkt, definiert durch

$$[\Pi_1 \oplus ... \oplus \Pi_n(g)](v_1, ..., v_n) = (\Pi_1(g)v_1, ..., \Pi_n(g)v_n) \qquad \forall g \in G \tag{3.5}$$

**Definition 7** (Vollständige Reduzibilität)**.** Eine endlich-dimensionale Darstellung ist vollständig reduzibel, falls sie äquivalent zu einer direkten Summe von irreduziblen Darstellungen ist.

Die Darstellungsmatrix einer reduziblen Darstellung ist dann ist dann äquivalent zu einer blockdiagonalen Matrix. Die Matrix aus Beispiel 1 ist blockdiagonal, also reduzibel.

## 3.2 Irreduzible Darstellungen der $su(2)$

Wie man später sehen wird, ist es für die Darstellungstheorie der Lorentz-Agebra wichtig, die irreduziblen Darstellungen der $SU(2)$ zu kennen. Daher werden die wichtigsten Resultate wiederholt.
Die Gruppe $SU(2)$ ist definiert als

$$SU(2) = \{A \in GL(2, \mathbb{C}),\ \det A = 1,\ A = A^\dagger\}. \tag{3.6}$$

Man findet als Generatoren $J^i = \sigma^i/2$, wobei $\sigma^i$ die Pauli-Matrizen sind. Die Generatoren erfüllen die Lie-Algebra $[J^i, J^j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}J^k$. Als Casimir-Operator findet man $\vec{J}^2$ mit den Eigenwerten $j(j+1)$ und $j$ halbzahlig. Man kann außerdem $J_3$ diagonal wählen, mit den Eigenwerten $m$ und $m = -j, -j+1, ..., j$. Schließlich kann man noch Leiteroperatoren $J_\pm = J^1 \pm \mathrm{i}J^2$ mit $J_\pm^\dagger = J_\mp$ definieren, die folgendermaßen wirken

$$J_\pm|j,m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}|j, m\pm 1\rangle \tag{3.7}$$

Zu gegebenem $j$ lauten die irreduziblen Darstellungen der Lie-Algebra der Generatoren in der Standardbasis des $\mathbb{R}^{2j+1}$ mit $|j,j\rangle = e_1, |j, j-1\rangle = e_2, ...$ dann.

$$J_3 = \begin{pmatrix} j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & j-1 & 0 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & -j \end{pmatrix} \qquad J_+ \quad = \begin{pmatrix} 0 & c_+(j,j) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_+(j,j-1) & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

$$J_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_-(j,j) & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 0 & c_-(j,-j+1) & 0 \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

Mit $c_\pm = \sqrt{j(j+1)-m(m\pm 1)}$. Aus $J_\pm = J^1 \pm \mathrm{i}J^2$ folgen $J^1$ und $J^2$ und durch Anwenden der Exponentialfunktion findet man die irreduzibeln Darstellunegn der $SU(2)$.

# 4 Irreduzible Matrixdarstellungen der Lorentz-Gruppe

## 4.1 Linke und rechte Fundamentaldarstellung

Betrachte die komplexen Linearkombinationen

$$T^i_\pm = \frac{1}{2}(J^i \pm \mathrm{i}K^i). \tag{4.1}$$

Diese erfüllen die Kommutator-Relationen

$$[T^i_\pm, T^j_\pm] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}T^k_\pm, \tag{4.2}$$
$$[T^i_+, T^i_-] = 0. \tag{4.3}$$

Diese neuen Generatoren erfüllen jeweils die Lie-Algebra der $SU(2)$. Die Lorentz-Gruppe ist also lokal isomorph zur Gruppe $SU(2)\times SU(2)$. Dabei ist aber zu beachten, dass $T^{\mathrm{i}}_\pm$ nicht in der gleichen Lie-Algebra wie $J^i$ und $K^i$ liegen, sondern in ihrer Komplexifizierung. Beim Übergang zu diesen komplexen Linearkombinationen wird nämlich auch der Darstellungsraum komplexifiziert, die Lorentz-Gruppe also in Komplexe fortgesetzt. Die gefunden Darstellungen können dann wieder auf die reellen Zahlen eingeschränkt werden.
Wegen (2.6) wirken $T^i_+$ und $T^i_-$ auf verschiedene Teilräume des Darstellungsraums. Die Gruppenelemente lassen sich schreiben als[1]

$$\Lambda = \exp\left[\mathrm{i}\left(\theta_i K^i + \phi_i J^i\right)\right] \tag{4.4}$$
$$= \exp\left[\mathrm{i}\left(\theta_i - \mathrm{i}\phi_i\right)T^i_+\right]\exp\left[\mathrm{i}\left(\theta_i + \mathrm{i}\phi_i\right)T^i_-\right] \tag{4.5}$$

Aus der Darstellungstheorie der $su(2)$ (Abschnitt 3.2) kennt man nun die Casimir-Operatoren der Algebra $T^2_\pm$ mit den Eigenwerten $j_\pm(j_\pm+1)$. Daher lassen sich die Darstellungen der Lorentz-Algebra durch $(j_-, j_+)$ klassifizieren. Dabei sind $j_\pm$ halbzahlig. Der Spin der Darstellung ist $j = j_+ + j_-$. Die diagonalen Generatoren $T^3_\pm$ haben jeweils $2j_\pm + 1$ Eigenwerte. Die Darstellung $(j_-, j_+)$ hat deshalb die Dimension $(2j_- + 1)(2j_+ + 1)$.

### Linke und rechte Fundamentaldarstellung

Die einfachste Darstellung der Lorentz-Gruppe gehört zu $(j_-, j_+) = (0,0)$. Dies ist die triviale Darstellun und die Elemente des Darstellungsraums transformieren sich wie Skalare.

[1]Genaugenommen gilt bei den Darstellungen $\Pi_1 \otimes \Pi_2$ eines Produktes von Lie-Gruppen $G\times H$ für die Darstellungen $\pi_1, \pi_2$ der Lie-Algebren $g, h$ für alle $X \in g, Y \in h$ die folgende Formel, $\pi_1 \otimes \pi_2(X,Y) = \pi_1(X)\otimes \mathbb{1}_{\dim \pi_2} + \mathbb{1}_{\dim \pi_1} \otimes \pi_2(Y)$. Dabei meint $\dim \pi_{1,2}$ die Dimension der Darstellung $\pi_{1,2}$
Man spricht deshalb auch davon, dass sich die Lie-Algebren eines Produkten von Lie-Gruppen addieren. Das $\mathbb{1}\otimes$ wird in der physikalischen Literatur meist weggelassen.

Im Fall $(j_+, j_-) = (1/2, 0)$ erhält man

$$T_+^i = \frac{1}{2}\sigma^i, \qquad\qquad T_-^i = 0. \tag{4.6}$$

Die Gruppenelemente schreiben sich als

$$\Lambda^{(1/2,0)} = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(\theta_i - \mathrm{i}\phi_i)\sigma^i\right] =: A_L \in SL(2,\mathbb{C}) \tag{4.7}$$

Diese Darstellung nennt man linke Fundamentaldarstellung. Analog erhält man die rechte Fundamentaldarstellung aus $(j_+, j_-) = (0, 1/2)$

$$T_+^i = 0, \qquad\qquad T_-^i = \frac{1}{2}\sigma^i \tag{4.8}$$

Die Gruppenelemente lauten dann

$$\Lambda^{(0,1/2)} = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}(\theta_i + \mathrm{i}\phi_i)\sigma^i\right] =: A_R \in SL(2,\mathbb{C}) \tag{4.9}$$

Die Elemente des Darstellungsraums heißen Links- bzw. rechtshändige (Weyl-)Spinoren $\Psi_{L,R}$ und transformieren sich nach $\Psi'_{L,R} = A_{L,R}\Psi_{L,R}$.

## 4.2 Weyl-Spinoren

Aus (4.7) und (4.9) folgt $A_L^{-1} = A_R^\dagger$. Andererseits rechnet man nach, dass $\sigma^2 A_L \sigma^2 = A_R^*$ gilt. Daraus folgt

$$\sigma^2 = A_L^\dagger \sigma^2 A_L. \tag{4.10}$$

Für $A_R$ erhält man eine vergleichbare Beziehung. An Gleichung (4.10) sieht man, dass $\sigma^2$ als eine Spinor-Metrik auftritt.
Betrachte nun die Lorentz-Transformation von $\sigma^2\Psi_L^*$:

$$(\sigma^2\Psi_L^*)' = \sigma^2 A_L^* \Psi_L^* = \sigma^2 A_L^* \underbrace{\sigma^2\sigma^2}_{=\mathbb{1}} \Psi_L^* = A_R(\sigma^2\Psi_L^*). \tag{4.11}$$

$\sigma^2\Psi_L^*$ transformiert sich also wie ein rechtshändiger Spinor. Analog kann man zeigen, dass sich $\sigma^2\Psi_R^*$ wie ein linkshändiger Spinor transformiert. Es lässt sich also schreiben

$$\Psi_R = -\mathrm{i}\sigma^2\Psi_L^*, \qquad\qquad \Psi_L = -\mathrm{i}\sigma^2\Psi_R^*. \tag{4.12}$$

Die Vorfaktoren sind so gewählt, dass die Verknüpfung beider Gleichungen die Identität ergibt. Im Weiteren wird deshalb $\mathrm{i}\sigma^2$ als Spinor-Metrik verwendet.

Man kann nun zeigen, dass die Kombinationen $\mathrm{i}\Phi_L^T\sigma^2\Psi_L$ und $\mathrm{i}\Phi_R^T\sigma^2\Psi_R$ Lorentz-Skalare sind, also Skalarprodukte definieren. Betrachte nun speziell das Skalarprodukt $\mathrm{i}\Psi_L^T\sigma^2\Psi_L$,

$$\mathrm{i}\Psi_L^T\sigma^2\Psi_L = \begin{pmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

$$= \Psi_1\Psi_2 - \Psi_2\Psi_1 = \begin{cases} 0, & [\Psi_1, \Psi_2] = 0 \\ 2\Psi_1\Psi_2, & \{\Psi_1, \Psi_2\} = 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

Um eine nicht-triviale Norm von Spinoren zu erhalten, muss also gefordert werden, dass die Komponenten antikommutieren.

**Tensorprodukte von Darstellungen**

Analog zur Clebsch-Gordan-Zerlegung bei der $SU(2)$ lassen sich Tensorprodukte von Darstellungen der Lorentz-Gruppe zerlegen nach

$$\Lambda^{(s,t)} \otimes \Lambda^{(u,v)} = \bigoplus_{p=|s-u|}^{s+u} \bigoplus_{q=|t-v|}^{t+v} \Lambda^{(p,q)}. \tag{4.15}$$

Speziell gilt

$$\Lambda^{(1/2,0)} \otimes \Lambda^{(0,1/2)} = \Lambda^{(1/2,1/2)}, \tag{4.16}$$

$$\Lambda^{(1/2,0)} \otimes \Lambda^{(1/2,0)} = \Lambda^{(1,0)} \oplus \Lambda^{(0,0)}. \tag{4.17}$$

Die Darstellung (4.16) entspricht den bekannten Vierer-Vektoren.

## 4.3 Parität

Drehungen und Boosts transformieren sich unter Raumspiegelungen nach

$$J^i \longmapsto J^i, \qquad\qquad K^i \longmapsto -K^i. \tag{4.18}$$

Daraus folgt für $T^i_\pm$

$$T^i_+ \longmapsto T^i_- \qquad\qquad T^i_- \longmapsto T^i_+. \tag{4.19}$$

Man kann nun die Chiralität $\lambda = -(j_+ - j_-)$ definieren. Darstellung mit $\lambda$ positiv/negativ nennt man dann rechtshändig/linkshändig. Raumspiegelung drehen wegen (4.19) die Chiralität um.
Für Darstellungen der Lorentz-Gruppe muss also unter Parität gelten:

$$P\Lambda^{(j,j')}(\vec{\phi}, \vec{\theta})P^{-1} = \Lambda^{(j',j)}(-\vec{\phi}, \vec{\theta}). \tag{4.20}$$

Dies kann zunächst nur für $j = j'$ gelten, da der links- und rechtshändige Anteil der Darstellungsräume andererseits verschiedene Dimensionen hätten und nach der Paritätsoperation

die Dimensionen der Darstellungen nicht zu den Unterräumen passen würden, auf den sie wirken.
Eine weitere Möglichkeit, die Lorentz-Gruppe um Paritätsoperationen zu erweitern, liegt in der Direkten Summe

$$\Lambda^{(j,j')} \oplus \Lambda^{(j',j)} = \begin{pmatrix} \Lambda^{(j,j')} & 0 \\ 0 & \Lambda^{(j',j)} \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

Der Paritätsoperator in dieser Darstellung lautet

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Man beachte, dass diese Darstellungen als Darstellungen von $\mathcal{L}_+^\uparrow$ reduzibel, jedoch als Darstellungen von $\mathcal{L}^\uparrow$ irreduzibel sind. Weiter handelt es sich bei diesen Darstellungen auch um die irreduziblen Darstellungen der vollen Lorentz-Gruppe, da sie sich auch unter Zeit-Inversion korrekt transformieren.

## 4.4 Dirac-Spinoren

Im Folgenden wird die einfachste nicht-triviale Darstellung der um Parität erweiterten Lorentzgruppe, $\Lambda^{(1/2,0)} \oplus \Lambda^{(0,1/2)}$, betrachtet. Der Darstellungsraum wird aufgespannt durch

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Phi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}. \tag{4.23}$$

Diese sogenannten Dirac-Spinoren transformieren sich nach

$$\begin{pmatrix} \Phi_L' \\ \Psi_R' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\theta_i - \mathrm{i}\phi_i)\sigma^i} & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{2}(\theta_i + \mathrm{i}\phi_i)\sigma^i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_L \\ \Psi_R \end{pmatrix}. \tag{4.24}$$

Sei nun $\Psi_R(\vec{p} = 0)$ ein „ruhender“ Spinor und betrachte einen reinen Boost

$$\Psi_R(\vec{p}) = \mathrm{e}^{-1/2\phi_i\sigma^i}\Psi_R(0) = \left[\cosh(\phi/2) + \vec{\sigma}\cdot\frac{\vec{\phi}}{\phi}\sinh(\phi/2)\right]\Psi_R(0) \tag{4.25}$$

Mit $\cosh(\phi/2) = \sqrt{(\gamma+1)/2}$, $\sinh(\phi/2) = \sqrt{(\gamma-1)/2}$ und $\hat{p} = \vec{\phi}/\phi = \vec{p}/p$ erhält man

$$\Psi_R(\vec{p}) = \left[\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \vec{\sigma}\cdot\hat{p}\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\Psi_R(0). \tag{4.26}$$

Mit $\gamma = E/m$ wird das zu[2]

$$\Psi_R(\vec{p}) = \frac{E + m + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}}{[2m(E+m)]^{1/2}}\Psi_R(0). \tag{4.27}$$

[2] Es gilt hier und im Folgenden $c = \hbar = 1$

Analog erhält man für den reinen Boost eines linkshändigen Spinors

$$\Phi_L(\vec{p}) = \frac{E + m - \vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{[2m(E+m)]^{1/2}} \Phi_L(0). \tag{4.28}$$

Bei $p = 0$ kann man linke und rechte Darstellung nicht unterscheiden. Daher gilt $\Phi_L(0) = \Psi_R(0)$. Damit folgt durch eliminieren von $\Phi_L(0)$ und $\Psi_R(0)$

$$-m\Psi_R(\vec{p}) + (p_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p})\Phi_L(\vec{p}) = 0, \tag{4.29}$$

$$(p_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p})\Psi_R(\vec{p}) - m\Phi_L(\vec{p}) = 0. \tag{4.30}$$

Im Fall $m = 0$ folgen die Weyl-Gleichungen

$$(p_0 + \vec{\sigma} \cdot \vec{p})\Phi_L(\vec{p}) = 0, \tag{4.31}$$

$$(p_0 - \vec{\sigma} \cdot \vec{p})\Psi_R(\vec{p}) = 0. \tag{4.32}$$

Im Fall $m \neq 0$ definiert man die Matrizen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ \mathbb{1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

und erhält die Dirac-Gleichung

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\Psi(p) = 0. \tag{4.34}$$

# 5 Irreduzible unitäre Darstellungen der Poincaré-Gruppe

## 5.1 Poincaré-Gruppe

Die Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}$ besteht aus der Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}$ und der Translations-Gruppe $\mathcal{T}$. Translationen werden durch den Vierer-Impuls $P^\mu$ erzeugt. Eine Poincaré-Transormation ist damit von der Form:

$$(\Lambda, a) = \exp\left[-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega_{\rho\sigma}M^{\rho\sigma} - \mathrm{i}a_\mu P^\mu\right] \tag{5.1}$$

Dabei ist $a^\mu$ die Länge, um die die Translation erfolgt. Die Verknüpfung von Transformationen ist gegeben durch:

$$(\Lambda_2, a_2) \circ (\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2). \tag{5.2}$$

Dies zeigt man am einfachsten anhand von Gleichung (2.2). Deshalb sagt man, dass sie Poincaré-Gruppe $\mathcal{P}$ ein semi-direktes Produkt aus $\mathcal{L}$ und $\mathcal{T}$ ist[3].

[3] Bei einem direkten Produkt wäre das Multiplikationsgesetz $(\Lambda_2, a_2) \circ (\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2\Lambda_1, a_1 + a_2)$

Die Lie-Algebra von $\mathcal{P}_+^\uparrow$ lautet[4]

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \tag{5.3}$$
$$[P^\mu, M^{\rho\sigma}] = \mathrm{i}(g^{\mu\rho}P^\sigma - g^{\mu\sigma}P^\rho), \tag{5.4}$$
$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -\mathrm{i}(g_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - g_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + g_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}). \tag{5.5}$$

Definiere nun den Pauli-Lubanski-Pseudovektor

$$W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\nu M^{\rho\sigma}. \tag{5.6}$$

Für diesen gilt $P^\mu W_\mu = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}P^\mu P^\nu M^{\rho\sigma} = 0$, da $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ antisymmetrisch und $P^\mu P^\nu$ symmetrisch unter der Vertauschung von Indizes sind. Man erhält dann die beiden Casimir-Operatoren

$$C_1 = P_\mu P^\mu = P^2 \qquad\qquad C_2 = W_\mu W^\mu = W^2. \tag{5.7}$$

Die Poincaré-Gruppe zerfällt in die 6 Klassen, die durch die Eigenwerte $p^2 = m^2$ von $P_\mu P^\mu = P^2$ klassifiziert werden:

(i) $p^2 = m^2 > 0$, $p^0 > 0$, (Massive Teilchen)

(ii) $p^2 = m^2 > 0$, $p^0 < 0$,

(iii) $p^2 = m^2 = 0$, $p^0 > 0$, (Masselose Teilchen)

(iv) $p^2 = m^2 = 0$, $p^0 < 0$,

(v) $p^\mu = 0$, (Vakuum)

(vi) $p^2 = m^2 < 0$, (Tachyonen)

Für diese Klassen sind die irreduziblen Darstellungen separat zu bestimmen. Dies soll im Folgenden bei der massiven und masselosen Darstellung durchgeführt werden.

## 5.2 Massive Darstellung

Wegen $P^\mu W_\mu = 0$ ist $W = (0, \vec{W})$ und

$$W^i = \frac{m}{2}\epsilon^{0ijk}M^{jk} = mJ^i, \tag{5.8}$$
$$\Rightarrow W^\mu W_\mu = 0 - \vec{W}\cdot\vec{W} = -m^2 j(j+1)\mathbb{1}. \tag{5.9}$$

$W^\mu$ hängt hier also mit dem Spin der Teilchen zusammen.
Wähle nun $k = (m, 0, 0, 0)$ als Eigenwert von $P^\mu$ als Repräsentanten der Klasse (i). Durch

[4] $\mathcal{P}_+^\uparrow$ ist das semidirekte Produkt von $\mathcal{L}_+^\uparrow$ und $\mathcal{T}$

eine Lorentz-Transformation kann ein zeitartiger Vierer-Vektor immer in diese Form gebracht werden. Räumliche Drehungen lassen diese Wahl von $P$ invariant. Hierdurch ist die sogenannte kleine Gruppe zu $k$ definiert:

$$\Lambda(\phi = 0, \theta)P^\mu = P^\mu \qquad \Leftrightarrow \qquad \{\Lambda(0,\theta)\} \cong SU(2) \text{ ist kleine Gruppe von } P \tag{5.10}$$

Die Zustände in dieser Darstellung werden durch $m$ und $j$ klassifiziert.
Sei $p^\mu$ ein beliebiger zeitartiger 4-Vektor, dann existiert eine LT $L^\mu{}_\nu(p)$, so dass

$$p^\mu = L^\mu{}_\nu(p)k^\nu. \tag{5.11}$$

Die zugehörigen Zustände transformieren sich dann nach

$$|p, j\rangle = |L(p)k, j, j_3\rangle = U(L(p))|p, j, j_3\rangle, \tag{5.12}$$

wobei $U(L(p))$ ein unitärer Operator ist, der $L(p)$ zugeordnet wird. Betrachte nun die Lorentz-Transformation

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|p, j\rangle &= U(\Lambda)U(L(p))|k, j, j_3\rangle && (5.13)\\ &= \underbrace{U(L(\Lambda p))U^{-1}(L(\Lambda p))}_{=\mathbb{1}} U(\Lambda)U(L(p))|k, j, j_3\rangle && (5.14)\\ &= U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p))U(\Lambda)U(L(p))|k, j, j_3\rangle && (5.15)\\ &= U(L(\Lambda p))U(L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p))|k, j, j_3\rangle && (5.16) \end{aligned}$$

Dabei wurden die Darstellungseigenschaften von $U$ verwendet, also $U^{-1}(A) = U(A^{-1})$ und $U(AB) = U(A)U(B)$. Die Wirkung der Matrix $L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p)$ auf $k$ lässt sich folgendermaßen dekomponieren

$$k \overset{L(p)}{\longmapsto} p \overset{\Lambda}{\longmapsto} \Lambda p \overset{L^{-1}(\Lambda p)}{\longmapsto} k. \tag{5.17}$$

$L^{-1}(\Lambda p)\Lambda L(p) =: R$ ist also eine räumliche Drehung. Die Wirkung von Drehungen auf Zustände ist definiert durch

$$U(R)|k, j, j_3\rangle = \sum_{j_3'=-j}^{j} D^{(j)}_{j_3' j_3}(R)|k, j, j_3'\rangle \tag{5.18}$$

Dabei ist $D^{(j)}$ eine irreduzible Darstellung der $SU(2)$ und damit gilt

$$\begin{aligned} U(\Lambda)|p, j, j_3\rangle &= U(L(\Lambda p)) \sum_{j_3'=-j}^{j} D^{(j)}_{j_3' j_3}(R)|k, j, j_3'\rangle && (5.19)\\ &= \sum_{j_3'=-j}^{j} D^{(j)}_{j_3' j_3}(R)U(L(\Lambda p))|k, j, j_3'\rangle && (5.20)\\ &= \sum_{j_3'=-j}^{j} D^{(j)}_{j_3' j_3}(R)|\Lambda p, j, j_3'\rangle && (5.21) \end{aligned}$$

Die Darstellung der Poincaré-Gruppe wurde auf die Darstellung der kleinen Gruppe zurückgeführt.

### 5.3 Masselose Darstellung

Für die masselose Darstellung wählt man den Repräsentanten $k^\mu = (k, 0, 0, k)$. Hier kann man zeigen, dass die kleine Gruppe erzeugt wird durch die Generatoren

$$J_3, \qquad L_1 = K_1 - J_2, \qquad L_2 = K_2 + J_1. \tag{5.22}$$

Die Lie-Algebra dieser Generatoren lautet

$$[L_1, L_2] = 0, \qquad [J_3, L_1] = \mathrm{i}L_2, \qquad [L_2, J_3] = \mathrm{i}L_1. \tag{5.23}$$

Diese formen die euklidische Gruppe $E(2)$ der Translationen und Drehungen in der $x^1$-$x^2$-Ebene.
Wegen $m^2 = 0$ gilt

$$W^2|k\rangle = 0, \qquad P^2|k\rangle = 0, \qquad P \cdot W|k\rangle = 0. \tag{5.24}$$

Daraus folgt, dass $P^\mu$ und $W^\mu$ proportional sein müssen,

$$(W^\mu - \lambda P^\mu)|k\rangle = 0. \tag{5.25}$$

Das heißt, dass masselose Teilchen nur durch eine Zahl charakterisiert werden, die Helizität $\lambda$. Man kann zeigen, dass $\lambda$ nur halbzahlige Werte annehmen kann. Bei Berücksichtigung der Parität nimmt die Helizität die Werte $\pm\lambda$ an. Dies ist der Grund dafür, dass masselose Teilchen nur zwei Polarisationsrichtungen besitzen.

# 6 Zusammenfassung

**Lorentz-Gruppe**

- Die Lorentzgruppe ist lokal isomorph zu $SU(2) \otimes SU(2)$
- Die irreduziblen Darstellungen der Lorentz-Gruppe werden aus denen der $SU(2)$ gewonnen
- Die fundamentalen Darstellungen sind Weyl-Spinoren mit Grassmann-wertigen Komponenten

**Poincaré-Gruppe**

- Die kleine Gruppe lässt eine Wahl von $p^\mu$ invariant
- Die irreduziblen Darstellungen der Poincaré-Gruppe werden aus denen der kleinen Gruppe gewonnen

# Literatur

[1] L. H. Ryder, „Quantum Field Theory“. Cambridge University Press, 1996

[2] M. Maggiore, „A Modern Introduction to Quantum Field Theory“. OUP Oxford, 2005

[3] M. Stingl, „Lorentz- und Poincaré-Gruppe“. Skript, Seminar Teilchen- und Kerntheorie 2000

[4] R. U. Sexl, H. K. Urbantke, „Relativität, Gruppen, Teilchen“. Springer, 1976

[5] H. Kalka, G. Soff, „Supersymmetrie“. Teubner, 1997

[6] B. C. Hall, „An Elementary Introduction to Groups and Representations“. `arxiv.org/abs/math-ph/0005032`

[7] R. Ticciati, „Quantum Field Theory for Mathematicians“. Cambridge University Press, 1999