

---

# Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

## - Symmetrien und Erhaltungssätze -

### Gruppen und Symmetrien

Michèle Pinkernell

15. Mai 2013

---

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Erste Erfahrungen mit Symmetrie . . . . .	1
1.2	Harmonischer Oszillator . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Gruppen</b>	<b>3</b>
2.1	Gruppenaxiome . . . . .	3
2.2	Gruppentafel . . . . .	4
2.3	Untergruppen . . . . .	5
2.4	Nicht-abel'sche Gruppen . . . . .	5
2.5	Permutationsgruppen . . . . .	6
2.6	Gruppenhomomorphismus . . . . .	7
2.7	Gruppenisomorphismus . . . . .	7
2.8	Darstellung . . . . .	7
2.9	Kontinuierliche Gruppen . . . . .	8
2.10	Lie-Gruppen . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Symmetrie</b>	<b>9</b>
3.1	Noether-Theorem . . . . .	10
3.2	Beispiel zum Noether-Theorem . . . . .	11
3.3	Aufstellung von Symmetrien und den zugehörigen Erhaltungsgrößen . . . . .	11
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>12</b>
	<b>Literatur</b>	<b>12</b>

# 1 Einleitung

## 1.1 Erste Erfahrungen mit Symmetrie

In der Schule wird Symmetrie schon in der ersten Klasse eingeführt. Man soll Aufgaben lösen, wie beispielsweise einfache Formen an einer Achse zu spiegeln.

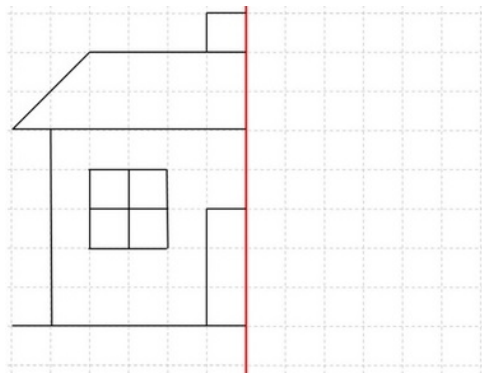


Abbildung 1: [Schroffenegger]

## 1.2 Harmonischer Oszillator

In den Grundvorlesungen kann man durch Ausnutzen von Symmetrien, Aufgaben erleichtern. Die Eigenschwingungen des folgenden Systems aus vier gleichen Atomen gleicher Masse  $M$  und Federn mit Federkonstante  $f$  zu bestimmen, führt auf ein gekoppeltes Gleichungssystem mit 4 Gleichungen.

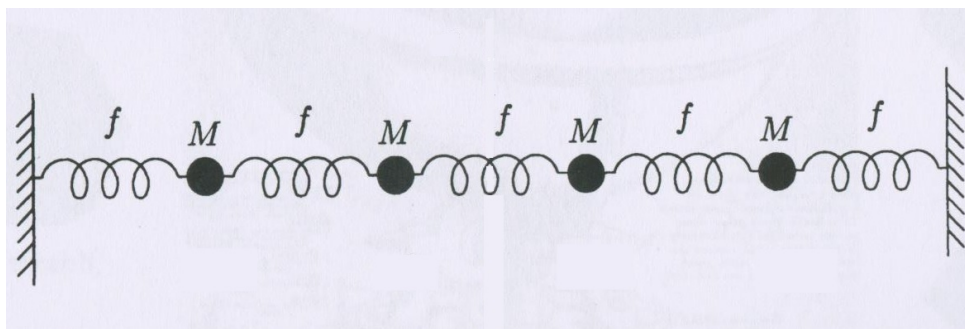


Abbildung 2: [Wagner]

Die Bewegungsgleichungen sind:

$$M\ddot{x}_1 = -fx_1 + f(x_2 - x_1); \quad (1)$$

$$M\ddot{x}_2 = -f(x_2 - x_1) + f(x_3 - x_2); \tag{2}$$

$$M\ddot{x}_3 = -f(x_3 - x_2) + f(x_4 - x_3); \tag{3}$$

$$M\ddot{x}_4 = -f(x_4 - x_3). \tag{4}$$

Der Ansatz  $x_j(t) = A_j \cdot \cos(\omega t)$ , mit  $j = 1, 2, 3, 4$ . führt dazu, dass die Nullstellen der Gleichung:

$$\det \begin{vmatrix} 2f - m\omega^2 & -f & 0 & 0 \\ -f & 2f - m\omega^2 & -f & 0 \\ 0 & -f & 2f - m\omega^2 & -f \\ 0 & 0 & -f & 2f - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

gefunden werden müssen.

Wird allerdings eine Symmetrieebene eingeführt, kann die Arbeit erleichtert werden.

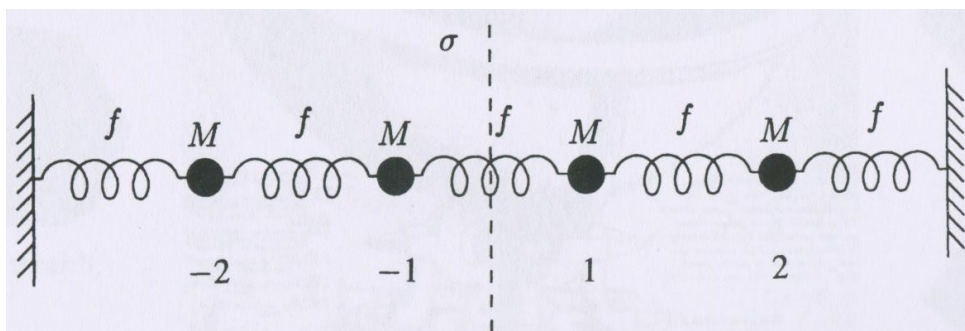


Abbildung 3: [Wagner]

Es mag

$$x'_j(t) = -A_{-j} \cdot \cos(\omega t), \quad \text{mit } j = \pm 1, \pm 2 \tag{6}$$

eine Lösung zu einer Frequenz  $\omega$  sein. Dann ist auch die gespiegelte Lösung die Gleichungen mit der selben Frequenz  $\omega$  lösen.

$$-x_{-j}(t) = -A_{-j} \cdot \cos(\omega t), \quad \text{mit } j = \pm 1, \pm 2 \tag{7}$$

Das ist nur möglich, wenn gilt:

$$x'_j = x_j : \quad A_{-j} = -A_j \quad (\text{„gerade“}) \tag{8}$$

oder

$$x'_j = -x_j : \quad A_{-j} = A_j \quad (\text{„ungerade“}). \tag{9}$$

Die Koordinaten können nun nach Schwingungstypen geordnet werden. Für die Schwingungen in Antiphase gilt:

$$x_{jg} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j - x_{-j}), \quad j = 1, 2 \tag{10}$$

und für die Schwingungen in Phase:

$$x_{ju} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j + x_{-j}), \quad j = 1, 2. \quad (11)$$

Vier gekoppelten Newton-Gleichungen werden so zu zwei entkoppelten Paaren:

$$\ddot{x}_{1g} = \frac{f}{M}(-3x_{1g} - x_{2g}); \quad (12)$$

$$\ddot{x}_{2g} = \frac{f}{M}(-2x_{2g} - x_{1g}) \quad (13)$$

und

$$\ddot{x}_{1u} = \frac{f}{M}(-x_{1u} + x_{2u}); \quad (14)$$

$$\ddot{x}_{2u} = \frac{f}{M}(-2x_{2u} + x_{1u}). \quad (15)$$

Damit erhält man 2 leicht lösbare Determinanten:

$$\det \begin{vmatrix} 3f - m\omega^2 & -f \\ -f & 2f - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0; \quad (16)$$

$$\det \begin{vmatrix} f - m\omega^2 & -f \\ -f & 2f - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (17)$$

Mit den Lösungen:

$$(\omega_g^2)_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{f}{M}$$

$$(\omega_u^2)_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{f}{M}.$$

Symmetrien in der Physik sind Transformationen. Das stimmt auch mit unserer Alltagserfahrung überein, dass Naturgesetze invariant gegenüber Verschiebung der Zeit und des Ortes sind.

Ein Versuch, den ich heute durchführe, führt zu dem gleichen Ergebnis wie ein Versuch, den ich morgen durchführe. Genauso wie ich erwarten kann, dass ein Versuch in Münster genauso abläuft, wie der gleiche Versuch in Coesfeld.

Symmetrien können in Gruppen beschrieben werden.

## 2 Gruppen

### 2.1 Gruppenaxiome

Eine Gruppe ist ein Paar  $(G, \circ)$ , wobei  $G$  eine Menge ist und  $\circ$  eine Verknüpfung auf  $G$ , die die folgenden Axiome erfüllt:

Abgeschlossenheit:

$$a \in G \wedge b \in G \Rightarrow a \circ b \in G.$$

Assoziativität:

$$a, b, c \in G \Rightarrow (a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

Existenz eines neutralen Elements:

$$\exists e \in G \forall a \in G : e \circ a = a \circ e = a.$$

Existenz eines inversen Elements:

$$a \in G \Rightarrow \exists b \in G : a \circ b = b \circ a = e.$$

Die Verknüpfung  $\circ$  heißt Gruppenmultiplikation.

Die Ordnung einer Gruppe ist die Anzahl der Elemente.

Es gibt:

- endliche Gruppen

Beispiel:  $\{1; -1; i; -i\}$ , Ordnung 4.

- unendliche Gruppen

Beispiel: Drehung eines Kreises um einen beliebigen Winkel.

- diskrete Gruppen

Beispiel: ganze Zahlen

- kontinuierliche Gruppen

Beispiel: Reelle Zahlen

## 2.2 Gruppentafel

Gegeben sei beispielsweise die Menge  $G = \{1; -1; i; -i\}$  und als Verknüpfung  $\circ$  die Multiplikation komplexer Zahlen. Die Ergebnisse der Verknüpfung kann in einer sog. Gruppentafel dargestellt werden.

$\circ$	1	-1	$i$	$-i$
1	1	-1	$i$	$-i$
-1	-1	1	$-i$	$i$
$i$	$i$	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	$i$	1	-1

Die Ordnung der Gruppe ist hier 4. Da die Gruppentafel symmetrisch zur Diagonale ist, ist die Gruppe vertauschbar. Sie heißt auch kommutative oder abel'sche Gruppe.

## 2.3 Untergruppen

Eine Untergruppe ist ein Paar  $(U, \circ)$ , das eine Gruppe bildet, wobei  $U$  die Untermenge einer Gruppe  $G$  ist und die Verknüpfung  $\circ$  dieselbe ist wie in  $G$ .

$\circ$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

Beispiel für die Gruppentafel der Untergruppe  $\{1; -1\}$

**Lagrange-Theorem:** Der Quotient aus der Ordnung einer Gruppe und der Ordnung einer ihrer Untergruppen ergibt eine natürliche Zahl.

Folgerung:

Gruppen, deren Ordnung eine Primzahl ist, haben nur zwei triviale Untergruppen. Sich selbst und die Gruppe, die nur aus dem neutralen Element besteht.

## 2.4 Nicht-abel'sche Gruppen

Ein Beispiel dafür ist die Gruppe der Drehungen und Spiegelungen eines gleichseitigen Dreiecks.

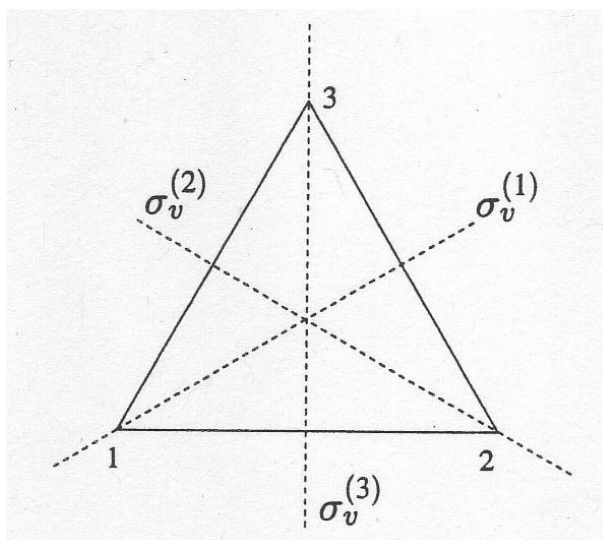


Abbildung 4: [Wagner]

Wenn das Dreieck zuerst an der Achse  $\sigma_v^{(1)}$  gespiegelt und dann um  $120^\circ$  gedreht wird, kommen die Eckpunkte woanders zu liegen, als wenn die Operationen in umgekehrter Reihenfolge ausgeführt werden.

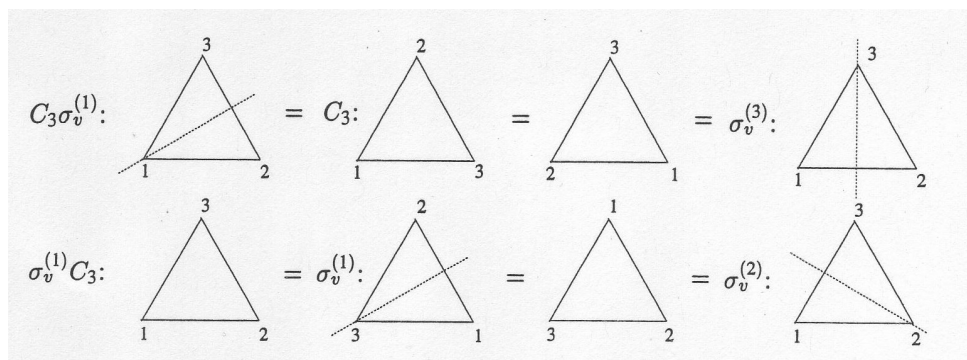


Abbildung 5: [Wagner]

Die Ordnung der Gruppe ist 6. Nach dem Theorem von Lagrange sind Untergruppen der Ordnung 2 und 3 möglich. Die Drehungen um  $120^\circ$  und um  $240^\circ$  zusammen mit dem neutralen Element eine Untergruppe der Ordnung 3. Die Spiegelungen um die Achsen  $\sigma_v^{(i)}$  mit  $i \in 1, 2, 3$  bilden zusammen mit dem neutralen Element jeweils eine Untergruppe der Ordnung 2.

## 2.5 Permutationsgruppen

Definition:

Eine Permutation ist die Anordnung von  $n$  unterscheidbaren Objekten, bei denen jeweils 2 vertauscht werden.

Ist die Anzahl der Vertauschungen von je 2 Elementen gerade, so spricht man von einer geraden Permutation. Im Beispiel mit dem Dreieck entspricht dieser Fall der Spiegelung um eine der Achsen  $\sigma_v^{(i)}$ . Sie bilden die Untergruppe  $A_n$  (auch alternierende Gruppe). Sind die Permutationen zyklisch, so bilden sie die Untergruppe  $C_n$ . Im Beispiel mit dem Dreieck entspricht das einer Drehung.

Permutationen können auf verschiedene Weisen geschrieben werden. Die Schreibweise

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

entspricht der Permutation  $1 \rightarrow 1, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 2$ .

Permutationen sind i. d. R. nicht kommutativ, denn

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Permutationen können auch als Matrizen dargestellt werden. Die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

ist gleichbedeutend mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## 2.6 Gruppenhomomorphismus

Wird jedes Element  $a_i$  einer Gruppe  $(A, \circ)$  einem Element  $b_j$  einer anderen Gruppe  $(B, \circ')$  zugeordnet, liegt ein Gruppenhomomorphismus vor.

Die Wirkungsweise der Verknüpfung bleibt erhalten.

Es gilt für  $a_i \in A, f(a_i) = b_i \in B$ :

$$a_1 a_2 = a_3 \quad \Rightarrow \quad b_1 b_2 = b_3$$

Abbildung  $f : A \rightarrow B$  heißt *Homomorphismus*.  $A$  und  $B$  können verschiedener Ordnung sein.  $\circ$  und  $\circ'$  können verschiedene Verknüpfungen sein.

Beispiel:

Seien  $(A = \{1; -1\}, \cdot)$  und  $(B = \mathbb{Z}, +)$  zwei Gruppen.

Die Abbildung  $f$  bilde alle geraden Zahlen auf 1 und alle ungeraden Zahlen auf  $-1$  ab.  $f$  ist ein Gruppenhomomorphismus.

## 2.7 Gruppenisomorphismus

Wirkt ein Homomorphismus in beide Richtungen (bijektiv), liegt ein Gruppenisomorphismus vor.

Beispiel:

Permutationsgruppe  $S_n$  und Spiegelungen und Drehungen eines regulären  $n$ -Ecks.

Warum die Permutationsgruppe eine so wichtige Rolle spielt, erklärt *Cayleys Theorem*: Jede endliche Gruppe der Ordnung  $n$  ist zu einer Untergruppe der Permutationsgruppe  $S_n$  isomorph.

Beweisskizze:

eine Spalte der Gruppentafel gibt Ergebnis der Multiplikation aller Elemente der Gruppe mit einem bestimmten Element an.

Jede Spalte ist eine Permutation der Gruppenelemente.

## 2.8 Darstellung

**Realisierung:** Können Elemente einer Gruppe und Gruppenoperationen in konkrete algebraische Struktur abgebildet werden, spricht man von einer Realisierung der Gruppe.



**Darstellung:** Geschieht die Realisierung durch Matrizen, liegt eine Darstellung vor.

**Treue Darstellung:** Von einer treuen Darstellung spricht man, wenn jedem Element eine Matrix entspricht und umgekehrt.

**Reduzible Darstellung:** Eine reduzible Darstellung liegt vor, wenn die Matrixdarstellung aus Matrixblöcken in der Diagonale besteht.

$$D(g) = \begin{pmatrix} A(g) & 0 \\ 0 & B(g) \end{pmatrix}$$

wobei  $A$  eine  $n \times n$ -Matrix und  $B$  eine  $m \times m$ -Matrix ist.

Die reduzible Darstellung zerfällt in unabhängige Teile, die jeweils für sich eine Gruppe darstellen.

**Irreduzible Darstellung** Eine Darstellung kann bis zur kleinstmöglichen Darstellung reduziert werden, der sog. irreduziblen Darstellung.

## 2.9 Kontinuierliche Gruppen

Bei kontinuierlichen Gruppen können die Gruppenelemente durch stetige Änderungen ineinander überführt werden.

Beispiel:

$U(1)$

Darstellung:

$\exp(i\varphi)$

Realisierung durch reelle Parameter

Die Anzahl ist abhängig von der jeweiligen Gruppe. Die Einschränkungen hängen von Art der Gruppe ab.

Der Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi)$  ist ein Beispiel für eine Parametrisierung. Er springt scheinbar am Rand. Das Gruppenelement ist trotzdem stetig, weil die Winkelfunktion periodisch ist.

Durch das Einführen neuer Koordinaten kann eine Gruppe stetig dargestellt werden.

## 2.10 Lie-Gruppen

Eigenschaften:

Die Funktion, die im Parameterraum die Gruppenmultiplikation ausdrückt, ist beliebig oft differenzierbar. Man spricht auch von analytisch.

Definition:

Eine Gruppe, deren Elemente durch  $N$  Parameter  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  parametrisiert ist, deren Parameter folgende Eigenschaften hat, heißt Lie-Gruppe.

1. Die Parameter  $\alpha_1, \dots, \alpha_N$  sind kontinuierlich und variabel.
2. Die Parametrisierung ist wesentlich. Es ist also nicht möglich, die Gruppe mit weniger Parametern zu parametrisieren.
3. Die Multiplikation ist analytisch. Für  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  mit  $g(\vec{\gamma}) = g(\vec{\alpha})g(\vec{\beta})$ :  $\vec{\gamma} = \phi(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ , wobei  $\phi$  eine analytische Funktion ist, also beliebig oft differenzierbar.

Beispiele für Lie-Gruppen:

$GL(n, \mathbb{R})$

Das ist die Gruppe der allgemeinen nicht-singulären Transformationen im  $\mathbb{R}^n$ .  
 $x \rightarrow x' = Ax$ .

$SL(n, \mathbb{R})$

Das ist die Untergruppe der  $GL(n, \mathbb{R})$  für die gilt:  $\det A = 1$ .

$SO(n)$

Spezielle, orthonormale  $n \times n$ -Matrizen  $R$  mit  $\det R = 1$  und  $RR^T = 1$ . Das sind Drehmatrizen im  $\mathbb{R}^n$ .

$SU(n)$

Spezielle, unitäre  $n \times n$ -Matrizen  $R$  mit  $\det U = 1$  und  $UU^+ = 1$ . Das sind Drehmatrizen im  $\mathbb{R}^n$ .

Da viele Gruppen Elemente haben, die selbst Symmetriegruppen sind, betrachten wir jetzt die Symmetrien.

### 3 Symmetrie

Definition:

Eine Symmetrie ist eine Transformation, die das Verhalten des physikalischen Systems nicht ändert.

Man kann Symmetrien auch als Unbeobachtbarkeit erklären. Wenn ich von dem Ausgang eines Experiments nicht auf den Ort oder die Zeit schließen kann, wo oder wann es ausgeführt wird, liegt eine Symmetrie vor.

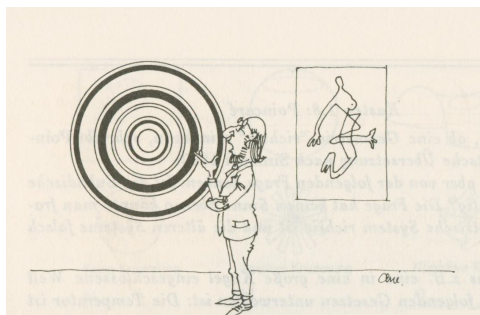


Abbildung 6: Da hat doch schon wieder einer das Bild verkehrt 'rum aufgehängt. [Genz]

Symmetrieformen können unterschieden werden nach kontinuierlich und diskret.

Ein Beispiel für eine kontinuierliche Symmetrie ist eine Drehung eines Kreises um einen beliebigen Winkel.

Bei den diskreten Symmetrien kann man unterscheiden zwischen solchen, die in kontinuierliche Symmetrien überführt werden können, wie beispielsweise die Drehung eines  $n$ -Ecks um  $\frac{360^\circ}{n}$  und Symmetrien, die in jedem Fall diskret sind wie Spiegelungen.

### 3.1 Noether-Theorem

Das Noether-Theorem besagt:

Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems existiert eine Erhaltungsgröße und umgekehrt.

Was dieser Satz besagt, soll hier an einem Beispiel unter Verwendung des Lagrange-Formalismus' nachvollzogen werden.

In der klassischen Mechanik:

- wird die unabhängige Koordinate ausgedrückt durch:  $t$ .
- der dynamischen Zustand beschrieben durch:  $q_i(t), \dot{q}_i(t)$ .
- lautet die Lagrangefunktion:  $L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)$ .
- gilt das Hamilton'sche Prinzip:  $\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt = 0$
- erhält man schließlich die Lagrange-Gleichungen:  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ .

Man betrachte folgende Transformation:

$$x^k \longrightarrow x'^k = x^k + \epsilon \alpha^k(x, \psi_i(x), \psi_{i,j}(x));$$

$$\psi_i \longrightarrow \psi'_i = \psi_i + \epsilon \phi_i(x, \psi_i(x), \psi_{i,j}(x)).$$

Damit kann man die Erhaltungsgröße bestimmen:

$$J^i = \sum_{jk} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{i,j}} (\psi_{i,j} \alpha^k - \phi_j) - \mathcal{L} \alpha^i;$$

$$\sum_i \frac{\partial J}{\partial x^i} = 0;$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_{V_3} J^0 d^3x}_Q = 0.$$

$$\Rightarrow Q = \text{const.}$$

### 3.2 Beispiel zum Noether-Theorem

Angewendet auf ein Teilchensystem mit  $N$  miteinander wechselwirkenden Teilchen lautet die Lagrange-Funktion:

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 + V(|\vec{r}_j - \vec{r}_k|),$$

die unter folgenden Transformationen invariant ist:

$$t \rightarrow t' = t;$$

$$\vec{r}_i \rightarrow \vec{r}'_i = \vec{r}_i + \epsilon \vec{a};$$

$$\alpha = 0;$$

$$\vec{\phi}_i = \vec{a}.$$

Bestimmung der Erhaltungsgröße:

$$J = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \cdot \vec{\phi}_i = \left( \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \right) \cdot \vec{a}.$$

$$\frac{d}{dt} J = 0 \Rightarrow \left( \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \right) \cdot \vec{a} = \text{const.}$$

Da  $\vec{a}$  beliebig sein kann, folgt daraus, dass  $\left( \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i \right) = \text{const.}$

Da  $L$  invariant ist gegenüber Verschiebungen im Raum, folgt daraus, dass der Gesamtimpuls des Systems erhalten ist.

### 3.3 Aufstellung von Symmetrien und den zugehörigen Erhaltungsgrößen

Symmetrie	Erhaltungsgröße	Bedeutung
Translationsinvarianz	Impuls	Homogenität des Raumes
Rotationsinvarianz	Drehimpuls	Isotropie des Raumes
Zeitinvarianz	Energie	Homogenität der Zeit
Eichtransformationsinvarianz	Ladungsdichte	Gesamtladungsdichte eines abgeschlossenen Systems ist konstant.
SU(2) des starken Isospins	Baryonenzahl	Baryonenzahl in einem abgeschlossenen System ist konstant.
SU(2) des schwachen Isospins	Leptonenzahl	Leptonenzahl in einem abgeschlossenen System ist konstant.
C, Ladungskonjugation		Das Verhalten eines Systems ändert sich nicht, wenn alle Ladungen umgekehrt werden.

Symmetrie	Bedeutung
P, Räumliche Spiegelung	Das Verhalten eines Systems ändert sich nicht, wenn es räumlich gespiegelt wird (Schwache Wechselwirkung verletzt diese Symmetrie.)
T, Zeitumkehr	Das Verhalten eines Systems ändert sich nicht, wenn die Zeit rückwärts abläuft.
CPT	Das Verhalten eines Systems ändert sich nicht, wenn Zeit und Raum gespiegelt werden.

## 4 Zusammenfassung

Die Ausnutzung von Symmetrien macht manche Rechnungen leichter. In der Physik versteht man unter Symmetrien Transformationen. Man kann sie in Gruppen beschreiben. Die Gruppentheorie untersucht algebraische Strukturen von Gruppen und ist definiert durch die Gruppenaxiome. Die Gruppentafel gibt einen Überblick über die Verknüpfungen. Ist eine Gruppe kommutativ, so heißt sie abel'sch. Das Lagrange-Theorem gibt Auskunft darüber, ob außer den trivialen Untergruppen noch weitere Untergruppen vorliegen können. Als wichtige Gruppentype wurde die Permutationsgruppe und die Lie-Gruppen vorgestellt. Auf die Lie-Gruppen wird im Verlauf des Seminars noch genauer eingegangen. Das Noether-Theorem besagt, dass zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eine Erhaltungsgröße existiert und umgekehrt.

## Literatur

- [Das] Ashok Das, Thomas Ferbel, *Kern- und Teilchenphysik: Einführung, Probleme, Übungen*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1995.
- [Fließbach] Thorsten Fließbach, *Mechanik: Lehrbuch zur Theoretischen Physik I*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2009.
- [Fischer] Gerd Fischer, *Lineare Algebra*, Vieweg, Wiesbaden, 1981.
- [Genz] Henning Genz, Roger Decker, *Symmetrie und Symmetriebrechung in der Physik*, Vieweg, Braunschweig, 1991.
- [Lang] Christian B. Lang, Norbert Pucker, *Mathematische Methoden in der Physik*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 2005.
- [Schroffenegger] [http://www.schroffenegger.at/openschoolbook/wiki\\_book/images/thumb/3/33/Symmetrie1.png/820px-Symmetrie1.png](http://www.schroffenegger.at/openschoolbook/wiki_book/images/thumb/3/33/Symmetrie1.png/820px-Symmetrie1.png)  
Nachgesehen am 17. Mai 2013.
- [Wagner] Max Wagner, *Gruppentheoretische Methoden in der Physik: Ein Lehr- und Nachschlagewerk*, Vieweg, Braunschweig, 1998.
- [Wikipedia] <http://de.wikipedia.org/wiki/Permutation>