

Pfadintegraldarstellung der Störungstheorie

Jona Dreier
j_drei04@uni-muenster.de

2. Juli 2012

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	klassisches Beispiel: anharmonischer Oszillator	2
3	skalares Feld mit Wechselwirkung	5
4	2-Punkt-Funktion in 1. Ordnung	6
5	Feynman-Diagramme	8
6	Zusammenfassung	10

1 Einleitung

In der Quantenmechanik lassen sich verschiedenste Systeme über den zugehörigen Hamiltonoperator charakterisieren, dessen zugehörige Eigenlösungen durch die Schrödingergleichung bestimmt werden. Die Schrödingergleichung kann allerdings nur für wenige Hamiltonoperatoren analytisch exakt gelöst werden. Daher wurden verschiedene Methoden entwickelt, um näherungsweise Lösungen der Schrödingergleichung bestimmen zu können:

- Variationsrechnung (Annahme einer parametrisierten Wellenfunktion; Bestimmung der Parameter für minimale Energie)
- Störungsrechnung (Bekannte, exakte Lösung zu einem ähnlichen Hamiltonoperator; Bestimmung der Abweichung der Energie)
- numerische Berechnung (meist iterative Bestimmung von Eigenlösungen)

In der Quantenfeldtheorie (QFT) geht der Hamiltonoperator über in die Lagrangedichte, welche die Art der auftretenden Wechselwirkungen beschreibt. Die Menge der Lagrangedichten, für die eine exakte Lösung analytisch bestimmt werden kann, ist jedoch sehr klein. Daher sind Näherungsverfahren in der QFT essentiell - insbesondere Störungsrechnung und numerische Verfahren. Die in der Störungsrechnung auftretenden Korrekturen verschiedener Ordnung der Näherung lassen sich dabei in sogenannten Feynman-Diagrammen darstellen. In der Pfadintegral-Darstellung der Störungstheorie

lassen sich ferner sogenannte Feynman-Regeln zur praktikablen Berechnung der Feynman-Diagramme vergleichsweise einfach und anschaulich ableiten. Da Feynman-Diagramme für störungstheoretische Rechnungen in der QFT sehr bedeutsam sind, soll in diesem Vortrag die Pfadintegral-Darstellung der Störungstheorie eingeführt und bis zur Darstellung in Feynman-Diagrammen entwickelt werden. Die Feynman-Regeln selbst sind aus Zeitgründen nicht enthalten, lassen sich mit den im Folgenden hergeleiteten Zusammenhängen aber einfach formulieren.

2 klassisches Beispiel: anharmonischer Oszillator

Zunächst soll ein klassisches Beispiel mithilfe des euklidischen Propagators störungstheoretisch behandelt werden. Durch die Ähnlichkeit zwischen euklidischem Propagator und Pfadintegral kann die Rechnung anschließend weitgehend auf die Pfadintegraldarstellung der Störungstheorie übertragen werden.

Hierfür sei an den euklidischen Propagator K_E und die euklidische Wirkung S_E erinnert:

$$K_E(0, \beta; 0, 0) = \langle 0 | e^{-\beta H} | 0 \rangle \quad (1)$$

$$= \int \mathcal{D}q \exp[-S_E(q, \dot{q})] \quad (2)$$

$$S_E(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \left(\frac{\partial q}{\partial \tau} \right)^2 + V(q) \quad (3)$$

Dabei ist τ die sogenannte imaginäre Zeit und $\beta \in \mathfrak{R}$. Berechnet werden soll die Energiekorrektur erster Ordnung Störungstheorie E_0^1 auf die Grundzustandsenergie des harmonischen Oszillators E_0 durch ein quartische Störung des Oszillatorpotentials:

$$V_\lambda(q) = \frac{1}{2} m \omega^2 q^2 + \frac{\lambda}{4!} q^4, \quad \lambda \in \mathfrak{R} \quad (4)$$

Der Vorfaktor des Störungsterms wurde dabei so gewählt, dass dieser sich im Laufe der Rechnung genau herauskürzen wird. Zur Berechnung der Grundzustandsenergie aus dem euklidischen Propagator kann folgender Zusammenhang verwendet werden:

$$E_0 = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{-1}{\beta} \ln K_E(0, \beta; 0, 0) \quad (5)$$

Die Gültigkeit von (5) folgt aus der exponentiellen Dämpfung aller Terme aus (1) mit zunehmender Energie. Im Grenzfall für große β trägt nur noch der Grundzustand bei, da dessen Energie minimal ist.

Um hierüber eine Energiekorrektur des Grundzustands zu bestimmen genügt es also den euklidischen Propagator auszuwerten. Setzt man dazu (3) mit (4) in (2) ein, so ergibt sich für den euklidischen Propagator des anharmonischen Oszillators K_E mit $S_{E,0}$ der euklidischen Wirkung des ungestörten harmonischen Oszillators:

$$\begin{aligned} K_E &= \int \mathcal{D}q \exp \left[-S_{E,0} - \int d\tau \frac{\lambda}{4!} q^4 \right] \\ &\stackrel{\wedge}{=} \int \mathcal{D}q \exp \left[-(aq^2 + bq^4) \right], \\ \text{wobei } aq^2 &\stackrel{\wedge}{=} S_{E,0} \quad \text{und} \quad b \stackrel{\wedge}{=} \frac{\lambda}{4!} \int d\tau \end{aligned}$$

Zur Auswertung dieses Integrals kann der quartische Term des Exponenten über Differentioperatoren dargestellt werden. Diese Darstellungsweise wird in der Pfadintegraldarstellung der QFT häufig benutzt und sei daher kurz erläutert:

$$\begin{aligned} e^{-ax^2} e^{-bx^4} &= e^{-ax^2} \left[1 - bx^4 + \frac{1}{2} (bx^4)^2 + \dots \right] \quad -x = \left. \frac{\partial}{\partial c} e^{-cx} \right|_{c=0} \\ &= e^{-ax^2} \left[1 - b \left(\frac{\partial}{\partial c} \right)^4 + \frac{1}{2} b^2 \left(\frac{\partial}{\partial c} \right)^8 \dots \right] e^{-cx} \Big|_{c=0} \\ &= e^{-ax^2} e^{-b \left(\frac{\partial}{\partial c} \right)^4} e^{-cx} \Big|_{c=0} \end{aligned} \tag{6}$$

Dabei wurde zweimal die Reihendarstellung der Exponentialfunktion benutzt. Um diese Darstellungsweise verwenden zu können, muss ein Term linear in q in die Exponentialfunktion des euklidischen Propagator des ungestörten Problems K_E^0 eingeführt werden. Dieser Term $\int d\tau Jq$ entspricht $-cx$ aus (6) und wird im Rahmen der QFT meist als Quellterm bezeichnet. Nach dem Ausführen der Differentialoperatoren wird er analog zu (6) gleich Null gesetzt. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} K_E^0[J] &= \int \mathcal{D}q \exp \left[-S_{E,0} + \int d\tau Jq \right] \\ &= C \exp \left[\frac{1}{2} \int d\tau d\tau' J(\tau) G(\tau - \tau') J(\tau') \right] \end{aligned} \tag{7}$$

$G(\tau - \tau')$ bezeichnet hier die Green'sche Funktion, während C eine Konstante bezeichnet, die das unendlich-dimensionale Pfadintegral umfasst. Die Gültigkeit der Darstellung des euklidischen Propagators gemäß (7) wurde für ein analoges Problem im Rahmen des vorangegangenen Vortrags über das skalare Feld ohne Wechselwirkung gezeigt. Insbesondere kann die Funktionalableitung von $K_E^0[J]$ nach J in dieser Darstellung leicht ausgeführt werden. Nun lässt sich der euklidische Propagator K_E des anharmonischen Oszillators über den euklidischen Propagator des harmonischen Oszillators $K_{E,0}[J]$ mit Hilfe der Differentialoperatorform der quartischen Störung schreiben:

$$\begin{aligned}
K_E &= \exp \left[-\frac{\lambda}{4!} \int d\tau \left(\frac{\delta}{\delta J(\tau)} \right)^4 \right] K_E^0[J] \Big|_{J=0} & e^x &= 1 + x + \mathcal{O}(x^2) \\
K_E^{(1)} &= \left(1 - \frac{\lambda}{4!} \int d\tau \left(\frac{\delta}{\delta J(\tau)} \right)^4 \right) K_E^0[J] \Big|_{J=0} \\
&= C - \frac{\lambda}{4!} \int d\tau \left(\frac{\delta}{\delta J(\tau)} \right)^4 \frac{C}{8} \left(\int d\tau' d\tau'' J(\tau') G(\tau' - \tau'') J(\tau'') \right)^2 \Big|_{J=0} \quad (8)
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Exponentialfunktion der Funktionalableitung bis zur ersten Ordnung entwickelt, sodass der euklidische Propagator $K_E^{(1)}$ in erster Ordnung Störungstheorie berechnet wird. Der Term 0ter Ordnung liefert mit $J = 0$ direkt einen konstanten Beitrag C . Für den Term erster Ordnung wird auch der ungestörte Propagator als Reihe entwickelt. Durch die 4-fache Funktionalableitung nach J liefern hier alle Summanden mit Potenzen von J kleiner als 4 keinen Beitrag. Durch das Nullsetzen des Quellterms J nach Ausführung der Funktionalableitungen liefern auch alle Terme der Ordnung größer 4 in J den Beitrag Null. Einen Beitrag ungleich Null liefert also nur der Term Nullter Ordnung sowie ein Term der Reihendarstellung des ungestörten Propagators für die erste Ordnung der Störungsrechnung. Werden außerdem die Grenzen des Integrals über die imaginäre Zeit τ eingesetzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
K_E^{(1)} &= C - \lambda \frac{C}{8} \int_0^\beta d\tau G^2(\tau - \tau) & G(\tau - \tau) &= \frac{-1}{2m\omega} \\
&= C \left(1 - \frac{\lambda\beta}{32m^2\omega^2} \right) & & \text{1. Ordnung} \\
&= C \exp \left[-\frac{\lambda\beta}{32m^2\omega^2} \right] \quad (9)
\end{aligned}$$

Erneut wurde die Reihendarstellung der Exponentialfunktion bis zu Termen erster Ordnung verwendet. Um aus (9) die erste Ordnung der Korrektur der

Grundzustandsenergie abzuleiten, kann nun (5) verwendet werden:

$$\begin{aligned}
E_0^{(1)} &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{-1}{\beta} \ln K_E^{(1)} \\
&= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{-\ln C}{\beta} + \frac{\lambda}{32m^2\omega^2} \right) \\
&= E_0 + \frac{\lambda}{32m^2\omega^2}
\end{aligned} \tag{10}$$

Zur Identifizierung des ersten Terms aus (10) betrachte man den Fall $\lambda = 0$, für den sich die Grundzustandsenergie E_0 des harmonischen Oszillators ergeben muss.

3 skalares Feld mit Wechselwirkung

Ausgehend von dieser Vorüberlegung erfolgt nun der Übertrag auf die Störungstheorie in der QFT. Dazu wird die Lagrangedichte \mathcal{L} des skalaren Felds mit Φ^4 -Wechselwirkung betrachtet. Mit \mathcal{L}_0 der Lagrangedichte des skalaren Felds ohne Wechselwirkung und $Z_0[J]$ dem zugehörigen Pfadintegral gilt:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!} \Phi^4 \\
Z_0[J] &= C'' \exp \left[-\frac{i}{2} \int dx dx' J(x) \Delta_F(x-x') J(x') \right]
\end{aligned} \tag{11}$$

Hierbei bezeichnet $\Delta_F(x-x')$ den Feynman-Propagator. λ , C'' , C' und C seien Konstanten. In analoger Weise zum zuvor betrachteten euklidischen Propagator des anharmonischen Oszillators lässt sich das Pfadintegral $Z[J]$ des skalaren Felds mit Wechselwirkung über $Z_0[J]$ darstellen.

$$\begin{aligned}
Z[J] &= C' \int \mathcal{D}\Phi \exp \left[i \int dx \mathcal{L} \right] \\
&= C' \int \mathcal{D}\Phi \exp \left[-i \int dx \frac{\lambda}{4!} \Phi^4 \right] \exp \left[i \int dx \mathcal{L}_0 \right] \\
&= C' \int \mathcal{D}\Phi \exp \left[-i \int dx \frac{\lambda}{4!} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] \exp \left[i \int dx \mathcal{L}_0 \right] \\
&= C \exp \left[-i \int dx \frac{\lambda}{4!} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] Z_0[J]
\end{aligned}$$

Die Konstante C wird dann so gewählt, dass $Z[J = 0] = 1$, d.h. $C = Z^{-1}[J = 0]$. Damit ergibt sich insgesamt:

$$Z[J] = \frac{\exp \left[-i \int dx \frac{\lambda}{4!} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] Z_0[J]}{\exp \left[-i \int dx \frac{\lambda}{4!} \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 \right] Z_0[J] \Big|_{J=0}} \quad (12)$$

Im Folgenden wird das Pfadintegral $Z[J]$ des skalaren Feldes mit Wechselwirkung betrachtet. Daher wird die gesamte Normierung in der Konstante C definiert, d.h. $C'' = 1$ gesetzt. Die Schreibweise C wird beibehalten, um unübersichtliche Ausdrücke zu vermeiden (siehe (12)).

4 2-Punkt-Funktion in 1. Ordnung

Nun soll aus dem Pfadintegral $Z[J]$ die 2-Punkt-Funktion in erster Ordnung Störungstheorie berechnet werden. Dazu wird ein weiterer Zusammenhang genutzt, der bereits im vorangegangenen Vortrag hergeleitet wurde, nämlich:

$$G^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{i} \right)^n \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \delta J(x_2) \cdots \delta J(x_n)} Z[J] \Big|_{J=0} \quad (13)$$

Zur Berechnung muss dann die Entwicklung des Pfadintegrals $Z[J]$ in erster Ordnung verwendet werden:

$$Z^{(1)}[J] = C \left[1 - i \frac{\lambda}{4!} \int \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 dx \right] Z_0[J] \quad (14)$$

Die 2-Punkt-Funktion in erster Ordnung ergibt sich dann aus (13), (14) und dem Pfadintegral des skalaren Felds ohne Wechselwirkung.

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x_1, x_2) &= \frac{-\delta^2}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} Z[J] \Big|_{J=0} \\ &= C \frac{-\delta^2}{\delta J(x_1) \delta J(x_2)} \left[1 - i \frac{\lambda}{4!} \int \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 dx \right] Z_0[J] \Big|_{J=0} \end{aligned}$$

Die Funktionalableitungen lassen sich in der Exponentialfunktionsdarstellung für $Z_0[J]$ aus (11) mit vergleichsweise geringem Aufwand berechnen. Insbesondere lässt sich der Term aus der 0ten Ordnung der Entwicklung für $Z[J]$ direkt ablesen.

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = C \left[i\Delta_F(x_1 - x_2) - \frac{-\delta^2}{\delta J(x_1)\delta J(x_2)} i\frac{\lambda}{4!} \int \left(\frac{\delta}{\delta J(x)} \right)^4 dx Z_0[J] \right]_{J=0}$$

Zur Berechnung des zweiten Term wird wie zuvor die Exponentialfunktion aus (11) als Reihe dargestellt. Da nach dem Ableiten J gleich Null gesetzt wird, liefert erneut nur der Summand sechster Ordnung in J einen Beitrag. In diesem treten drei Feynman-Propagatoren Δ_F auf, sodass zwei Fälle unterschieden werden müssen. Einerseits können beide Funktionalableitungen $\frac{\delta}{\delta J(x_i)}$ auf den selben Term $J(x)\Delta_F(x-x')J(x')$ wirken. Daraus resultiert ein Feynman-Propagator, dessen Argument durch x_1, x_2 bestimmt ist: $\Delta_F(x_1 - x_2)$. Andererseits können die Ableitungen auf zwei verschiedene Terme wirken, was zwei Feynman-Propagatoren $\Delta_F(x_1 - x), \Delta_F(x - x_2)$ liefert. Die jeweils verbleibenden Feynman-Propagatoren ergeben sich als $\Delta_F(x - x) = \Delta_F(0)$. Diese werden als Loop oder Vakuumschleifen bezeichnet und beschreiben eine Selbstwechselwirkung des Feldes. Durch kombinatorische Überlegungen lässt sich zeigen, dass der erste Fall $6 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 144$ -fach auftritt, der zweite Fall $6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 576$ -fach. Insgesamt ergibt sich somit:

$$G^{(2)}(x_1, x_2) = C \left[\underbrace{i\Delta_F(x_1 - x_2)}_{:=a} - \frac{\lambda}{2} \underbrace{\int dx \Delta_F(x_1 - x)\Delta_F(0)\Delta_F(x - x_2)}_{:=b} - \frac{\lambda}{8} \underbrace{\int dx \Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F^2(0)}_{:=c} \right]$$

Nun muss der Vorfaktor $C = Z[J=0]$ entsprechend der Entwicklung in erster Ordnung betrachtet werden. Dazu wird die darin auftretende Exponentialfunktion der Funktionalableitungen (vgl. (12)) in erster Ordnung entwickelt. Die nullte Ordnung liefert direkt einen konstanten Beitrag 1, während für die erste Ordnung wiederum Z_0 als Reihe dargestellt wird. Analog zur gerade durchgeführten Betrachtung liefert daraus nur der Term quartisch in J einen Beitrag. Somit ergibt sich:

$$\begin{aligned} C &= \left(1 - \frac{i\lambda}{8} \int dx \Delta_F^2(0) \right)^{-1} && \text{Taylorentwicklung} \\ &= 1 - \frac{i\lambda}{8} \int dx \Delta_F^2(0) \\ &= 1 + \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Taylorentwicklung zu $1/(1-x)$ in erster Ordnung um $x = 0$ verwendet.

$$\begin{aligned}
G^{(2)}(x_1, x_2) &= (a - b - c)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \\
&= a - b - c + c - \frac{bc}{a} - \frac{c^2}{a} \\
&= a - b + \mathcal{O}(\lambda^2) \\
&= i\Delta_F(x_1 - x_2) - \frac{\lambda}{2} \int dx \Delta_F(x_1 - x)\Delta_F(0)\Delta_F(x - x_2) \quad (15)
\end{aligned}$$

Da sowohl b , als auch c linear in λ sind, a allerdings nicht, liefern die beiden Brüche in erster Ordnung keinen Beitrag. Insbesondere kürzt sich der Term c genau heraus, sodass nur ein einfacher Loop auftritt, kein quadratischer. Auch in höheren Ordnungen wird sich dies in der Weise reproduzieren, dass Loops (also Selbstwechselwirkungen des Feldes) maximal in der Ordnung der Entwicklung auftreten.

5 Feynman-Diagramme

Die beiden verbleibenden Terme der 2-Punkt-Funktion a und b können in Form zweier Feynman-Diagramme veranschaulicht werden (siehe Abb. 1).



Abbildung 1: Feynman-Diagramme der 2-Punkt-Funktion in 1. Ordnung Störungstheorie; links: erster Term aus (15) (a , 0. Ordnung), rechts: zweiter Term (b , 1. Ordnung)

Auch Terme der Entwicklung in höherer Ordnung und anderer n -Punkt-Funktionen lassen sich wie zuvor für die 2-Punkt-Funktion durchgeführt berechnen. Die einzelnen Terme lassen sich ebenfalls als Feynman-Diagramme darstellen. Die n -Punkt-Funktion (in der angegebenen Ordnung) ist dann die Summe der einzelnen Feynman-Diagramme. Die maximal in einem dieser Diagramme auftretende Potenz der Selbstwechselwirkung (Anzahl der verbundenen Loops) entspricht der Ordnung der Entwicklung.

Es sei ohne Rechnung der entsprechende Ausdruck der 4-Punkt-Funktion angegeben:

$$\begin{aligned}
G^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) = & -\left(\Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x_3 - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_F(x_2 - x_4) \right. \\
& + \left. \Delta_F(x_1 - x_4)\Delta_F(x_2 - x_3)\right) - \frac{i\lambda}{2} \int dx \left(\Delta_F(x_1 - x_2)\Delta_F(x - x_3)\Delta_F(x - x_4) \right. \\
& + \Delta_F(x_1 - x_3)\Delta_F(x - x_2)\Delta_F(x - x_4) + \Delta_F(x_1 - x_4)\Delta_F(x - x_2)\Delta_F(x - x_3) \\
& + \Delta_F(x_2 - x_3)\Delta_F(x - x_1)\Delta_F(x - x_4) + \Delta_F(x_2 - x_4)\Delta_F(x - x_1)\Delta_F(x - x_3) \\
& + \left. \Delta_F(x_3 - x_4)\Delta_F(x - x_1)\Delta_F(x - x_2)\right) \Delta_F(0) \\
& - i\lambda \int dx \Delta_F(x - x_1)\Delta_F(x - x_2)\Delta_F(x - x_3)\Delta_F(x - x_4) \tag{16}
\end{aligned}$$

Die zugehörigen Feynman-Diagramme sind in Abb. 2 gezeigt.

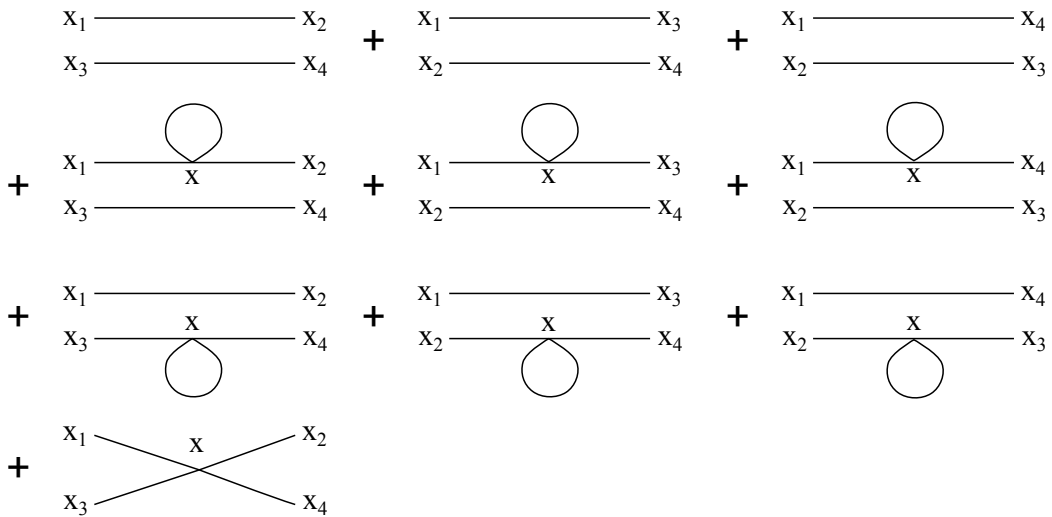


Abbildung 2: Feynman-Diagramme der 4-Punkt-Funktion in 1. Ordnung Störungstheorie; vergleiche Terme aus (15)

6 Zusammenfassung

- Terme höherer Ordnung in Exponentialfunktionen können über einen Quellterm durch Anwenden von Differentialoperatoren dargestellt werden. Insbesondere können Terme höherer Ordnung in der Lagrange-dichte somit durch das wiederholte Anwenden des selben Operators erzeugt werden. Diese Methode vereinfacht die weitere Rechnung oft deutlich und wird in der QFT häufig benutzt.
- Die direkte Berechnung des Pfadintegrals in der Störungstheorie ist bereits für verhältnismäßig einfache Fälle (2-Punkt-Funktion, erste Ordnung) aufwendig, liefert aber mit Hilfe von Feynman-Diagrammen sehr anschaulich darstellbare Ergebnisse
- Mit der Impulserhaltung lassen sich die Feynman-Regeln in Pfadintegral-Darstellung sehr anschaulich ableiten. Mit diesen wird die Berechnung der n-Punkt-Funktionen deutlich vereinfacht und praktikabel. n-Punkt-Funktionen werden üblicherweise über diese Regeln berechnet.

Literaturverzeichnis

- [1] Ashok Das; Field Theory, a path integral approach; World Scientific (1993)
- [2] R. MacKenzie; Path Integral Methods and Applications; UdeM-GPP-TH-00-71 (2000)
- [3] W. Straub; Feynman's Path Integral Approach to Quantum Field Theory; (2004)