

# Das Pfadintegral in der Quantenmechanik

---

*Ausarbeitung des Vortrags vom 25.04.2012  
im Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder  
von Christoph Schöler*

## Inhalt

1. Einleitung.....	1
2. Grundgedanke .....	2
3. Herleitung.....	3
3.1 Formulierung des Propagators.....	3
3.2 Allgemeine Vorüberlegungen .....	4
3.3 Freies Teilchen.....	6
3.4 Einschub: Klassische Mechanik im Lagrange-Formalismus.....	7
3.5 Teilchen im Potential .....	8
3.6 Anmerkungen.....	10
4. Klassischer Grenzfall.....	10
5. Literatur.....	12

## 1. Einleitung

Mitte der zwanziger Jahre des vergangenen Jahrhunderts fasste die Quantenmechanik durch die Formulierung der Schrödingergleichung Gestalt. In ihrer Darstellung als Wellengleichung werden Operatoren als Observable und Wellenfunktionen als Elemente von Hilberträumen verwendet. Eben diese Größen treten auch in der von Heisenberg aufgestellten, äquivalenten Formulierung der Quantenmechanik auf. Hier tragen im Gegensatz zur Schrödinger-Darstellung die Operatoren die Zeitabhängigkeit eines Systems, was sich in der Heisenbergschen Bewegungsgleichung ausdrückt. Beide Grundgleichungen lassen sich mittels der Transformation  $O_H = U^\dagger O_S U$  ineinander überführen, wobei  $O_H$  bzw.  $O_S$  ein Operator im Heisenberg- bzw. Schrödingerbild und  $U$  der Zeitentwicklungsoperator ist. Sowohl die Eigenarten der Operatoralgebra (z.B. Vertauschbarkeit) als auch die Interpretation der Wellenfunktion vermitteln ein eher unanschauliches Verständnis der Quantenmechanik.

Umso erstaunlicher ist es, dass Richard Feynman 1948 eine dritte vollständige Beschreibung der Quantenmechanik fand, die zum einen eine sehr anschauliche Vorstellung vermittelt und zum anderen gänzlich ohne das mathematische Konzept der Hilberträume auskommt. Aufgebaut wurde sie auf ersten Überlegungen von Dirac im Jahre 1933 zu der Rolle der klassischen Wirkung  $S[x] := \int d\tau \mathcal{L}[x(\tau), \dot{x}(\tau)]$ , mit der Lagrange-Funktion  $\mathcal{L}$ , in der Quantenmechanik. Diracs Schlussfolgerung lauteten, dass der quantenmechanische Propagator  $G$ , der die Fortbewegung eines Teilchens beschreibt, die klassische Wirkung in der Form  $G \sim e^{iS[x]/\hbar}$  enthält.

Während Dirac hierbei allerdings nur die Wirkung des klassischen Pfades als Beitrag zum Propagator berücksichtigte, benutzt das Teilchen nach Feynmans Erweiterung alle möglichen Wege zwischen Anfangs- und Endpunkt. Jeder mögliche Pfad  $x(\tau)$  liefert einen Beitrag  $e^{iS[x]/\hbar}$  zum Propagator, wobei sich die Amplituden der Einzelpfade gemäß den üblichen quantenmechanischen Regeln für die Kombination von Amplituden aufaddieren:

$$G = \sum_{x(\cdot)} e^{i/\hbar \cdot S[x(\cdot)]} \quad (1.1)$$

Die Bedeutung des Pfadintegrals spiegelt sich in vielen Anwendungen wider. So lassen sich mit seiner Hilfe nicht-störungstheoretische Probleme wie das Instanton und Phänomene wie das Polaron oder der Aharonov-Bohm-Effekt behandeln. In der Quantenfeldtheorie ist das Pfadintegral darüberhinaus unverzichtbar für die lorentzkovariante Quantisierung von Eichtheorien. Es eignet sich besonders zur Beschreibung von Streuprozessen, so wie es die übersichtliche Herleitung der Feynman-Regeln ermöglicht.

Abweichend von der Vorgehensweise Feynmans, der das Pfadintegral auf eine andere Weise herleitete und anschließend dessen Äquivalenz zu den bestehenden Formulierungen zeigte, geschieht die Herleitung hier ausgehend von den Kenntnissen der Quantenmechanik, d.h. der Schrödingergleichung mit Hamiltonoperator  $H$ . Ergänzend wird im letzten Abschnitt gezeigt, wie das Pfadintegral auf elegante und anschauliche Weise das Korrespondenzprinzip erfüllt.

## 2. Grundgedanke

Um den hinter dem Pfadintegral liegenden Grundgedanken zu verstehen, dient im einfachsten Fall die in Abbildung 1 dargestellte, eindimensionale Situation eines Doppelspaltexperiments. Dabei wird die bekannte Entstehung des Interferenzmusters hinter dem Spalt dadurch gedeutet, dass für die Propagation eines Teilchens von  $x_0$  zum Zeitpunkt  $t_0$  nach  $x_t$  zum Zeitpunkt  $t$  alle möglichen, klassischen Pfade berücksichtigt werden, die es für diese Propagation bestreiten kann.

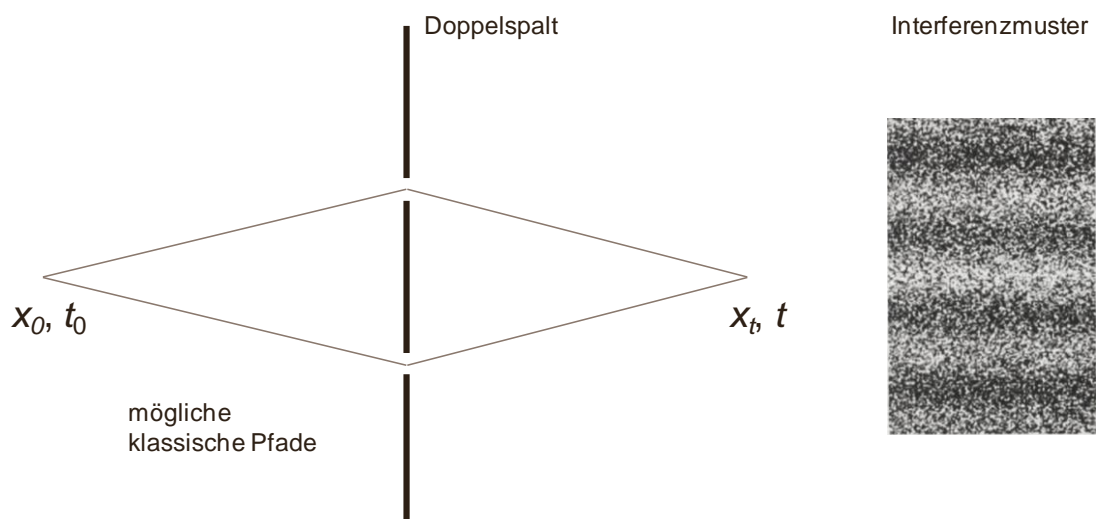


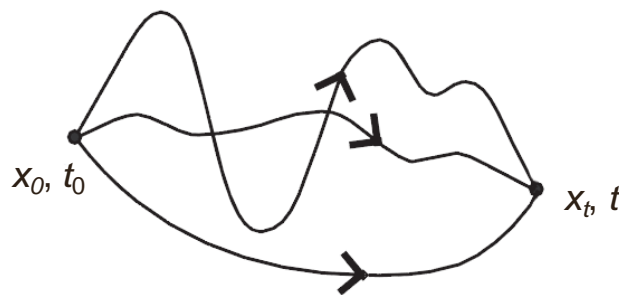
Abbildung 1: Interferenzmuster beim Doppelspaltexperiment als Resultat der Berücksichtigung beider Durchgangsmöglichkeiten für ein von  $(x_0, t_0)$  nach  $(x_t, t)$  propagierendes Teilchen. (Interferenzmuster aus [http://en.wikipedia.org/wiki/File:Double-slit\\_experiment\\_results\\_Tanamura\\_2.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Double-slit_experiment_results_Tanamura_2.jpg))

Beim Doppelspalt in Abbildung 1 wird also sowohl der Weg durch den oberen als auch der durch den unteren Spalt mitberücksichtigt. Formal geschieht die in der Überlagerung der Wahrscheinlichkeitsamplituden der jeweiligen Einzelpfade:

$$A = A_{oben} + A_{unten} \quad (2.1)$$

Analog zur Überlagerung von Lichtwellen tritt durch Betrachtung bei  $x_t$  als „Intensitätsmuster“  $|A|^2$  in Erscheinung, wodurch es wegen (2.1) dann zur Interferenz kommt.

Der allgemeine Fall des Pfadintegrals lässt sich nun aus der Doppelspaltsituation derart approximieren, dass zum einen die Spaltanzahl erhöht wird und zum anderen mehrere solcher Blenden hintereinander in den „Strahlengang“ des Teilchens gebracht werden. Bei immer größer werdender Spaltanzahl bzw. dichter werdender Blendenanordnung erfolgt schließlich der Übergang ins Kontinuierliche. Auf diese Weise lassen sich alle möglichen Pfade für die Propagation des Teilchens vom Ort  $x_0$  zum Ort  $x_t$  erfassen (s. Abbildung 2).



**Abbildung 2:** Zur Veranschaulichung des Grundgedankens hinter dem Pfadintegral. Alle möglichen Pfade werden zur Beschreibung der Propagation eines Teilchens mitberücksichtigt. (Aus [1], S. 318)

Der Überlegung am Doppelspalt entsprechend ergibt sich die Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Propagation aus der „Summe“ der einzelnen Amplituden aller möglichen Pfade:

$$A(x_t, t; x_0, t_0) = \sum_{\text{Pfade}} A_{\text{Pfad}} \quad (2.2)$$

Wobei hier die Summe symbolisch aufzufassen ist, denn aufgrund der Überabzählbarkeit der Möglichkeiten muss in Wirklichkeit ein Integral verwendet werden.

### 3. Herleitung

Im Folgenden wird das Pfadintegral eines Teilchens in einer Dimension als Resultat für die Übergangsamplitude hergeleitet.

#### 3.1 Formulierung des Propagators

Für ein nicht-relativistisches, Spin-loses Teilchen der Masse  $m$  in einem Potential  $V$  lautet die Schrödingergleichung:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi \quad \text{mit} \quad H = \frac{p^2}{2m} + V := T + V \quad (3.1)$$

Für den hier betrachteten Fall eines zeitunabhängigen Hamiltonoperators lässt sich die zeitliche Entwicklung eines Zustandes  $|\psi(t)\rangle$  mithilfe des Zeitentwicklungsoperators

$$U(t; t_0) = e^{-i/\hbar \cdot (t-t_0)H} \quad (3.2)$$

durch

$$|\Psi(t)\rangle = U(t; t_0)|\Psi(t_0)\rangle \quad (3.3)$$

beschreiben.

Für die im Folgenden angestellten Betrachtungen ist es zweckmäßig, ein vollständiges System von Eigenzuständen des Ortsoperators einzuführen:

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle, \quad \langle x_j|x_i\rangle = \delta(x_i - x_j), \quad \int dx|x\rangle\langle x| = \hat{1} \quad (3.4)$$

Damit lässt sich die Problemstellung wie in Abbildung 3 schildern. Hierbei steht  $A(x, t; x_0, t_0)$  für die Wahrscheinlichkeitsamplitude, ein Teilchen zur Zeit  $t$  am Ort  $x_t := x(t)$ , d.h. im Zustand  $|x_t\rangle$ , anzutreffen, wenn es sich zum Zeitpunkt  $t_0$  bei  $x_0 := x(t_0)$  befand.

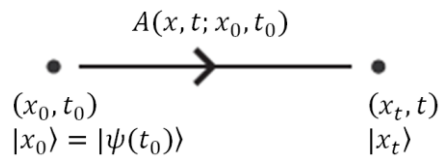


Abbildung 3: Ausgangssituation und Nomenklatur zur Herleitung der Übergangsamplitude  $A(x, t; x_0, t_0)$ .

Mit der Zeitentwicklung des Zustandes  $|\psi(t_0)\rangle$  gemäß (3.3) ergibt sich für die Wahrscheinlichkeitsamplitude:

$$A(x, t; x_0, t_0) := \langle x_t|\psi(t)\rangle = \langle x_t|U(t; t_0)|\psi(t_0)\rangle = \langle x_t|U(t; t_0)|x_0\rangle \quad (3.5)$$

Dieser Ausdruck wird häufig auch als *Propagator* bezeichnet. Ebenfalls geläufig ist die Benennung *Greensche Funktion*, da er eine Differentialgleichung der Form  $AG = \delta$  erfüllt<sup>1</sup>.

Da hier o.B.d.A.  $t_0 = 0$  angenommen wird, folgt aus (3.5) mit (3.2) für den Propagator:

$$A := A(x, t; x_0, t_0 = 0) = \langle x_t|e^{-i/\hbar \cdot tH}|x_0\rangle = \langle x_t|e^{-\lambda H}|x_0\rangle \quad (3.6)$$

mit  $\lambda := it/\hbar$

Zentrale Aufgabe ist es nun, diese Amplitude zu berechnen.

### 3.2 Allgemeine Vorüberlegungen

Zur Berechnung der Übergangsamplitude (3.6) eines Teilchens für die Propagation von  $x_0$  nach  $x_t$  innerhalb der Zeit  $t$ , wird das betrachtete Zeitintervall in gleich große, zunächst endlich viele Teilstücke zerlegt und somit durch eine Propagation entlang mehrerer Teilpfade approximiert. Der Übergang zu infinitesimalen Zeitstücken liefert dann das Pfadintegral.

Die Unterteilung des Zeitintervalls  $t$  in  $N$  Teile lässt sich formal schreiben als:

$$t = N \cdot \Delta t \quad (3.7)$$

$$\text{mit } \Delta t := \frac{t}{N}$$

Daraus ergeben sich die diskreten Zeitpunkte für die Propagation über  $N$  Teilpfade:

<sup>1</sup> Genaueres ist in [3] nachzulesen.

$$t_n := n \cdot \Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N \quad (3.8)$$

Speziell folgt aus (3.8) und (3.7)  $t_0 = 0$  sowie  $t_N = t$  für Anfangs- und Endzeitpunkt.

Als nächstes wird die Aufspaltung in der Zeitentwicklung im Propagator berücksichtigt. Hierbei findet  $N$ -mal eine Propagation in der Zeit um  $\Delta t = t/N$  statt:

$$A = \langle x_t | e^{-i/\hbar \cdot tH} | x_0 \rangle = \langle x_t | (e^{-i/\hbar \cdot t/N \cdot H})^N | x_0 \rangle \stackrel{\lambda=it/\hbar}{=} \langle x_t | \underbrace{e^{-\lambda/N \cdot H} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda/N \cdot H}}_{N\text{-mal}} | x_0 \rangle \quad (3.9)$$

Für das einfachere Verständnis der folgenden Schritte wird zunächst der Spezialfall  $N = 2$  betrachtet. Aus (3.9) ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} A &= \langle x_t | e^{-\lambda/2 \cdot H} \cdot e^{-\lambda/2 \cdot H} | x_0 \rangle = \langle x_t | e^{-\lambda/2 \cdot H} \underbrace{\int dx_1 | x_1 \rangle \langle x_1 |}_{=\hat{1}} e^{-\lambda/2 \cdot H} | x_0 \rangle \\ &= \int dx_1 \langle x_t | e^{-\lambda/2 \cdot H} | x_1 \rangle \langle x_1 | e^{-\lambda/2 \cdot H} | x_0 \rangle \end{aligned} \quad (3.10)$$

Hierbei wurde gemäß (3.4) ein Eins-Operator zwischen die Exponentialfunktionen im Propagator eingefügt. In (3.10) ist  $x_1$  als  $x(t_1)$  aufzufassen und insgesamt ergibt sich für den Propagator im Fall  $N = 2$ :

$$A = \int dx_1 A(x_t, t; x_1, t_1) A(x_1, t_1; x_0, t_0) = \int dx_1 \underbrace{A(x_2, t_2; x_1, t_1)}_{:=A_{x_2, x_1}} \underbrace{A(x_1, t_1; x_0, t_0)}_{:=A_{x_1, x_0}} \quad (3.11)$$

$t_0 = 0$   
 mit  $t_1 = 1 \cdot \Delta t = t/2$   
 $t_2 = 2 \cdot \Delta t = t$

Zur Interpretation von Ausdruck (3.11) dient Abbildung 4. Zur Übergangsamplitude für die Propagation des Teilchens von  $x_0$  zu  $x_t$  tragen alle Pfade über jede mögliche Zwischenposition bei  $x_1$  (zum Zeitpunkt  $t_1$ ) bei. Die Übergangsamplitude ergibt sich aus der „Summe“ über die Amplituden der einzelnen Pfade, wobei jede mögliche Zwischenposition  $x_1$  berücksichtigt wird.

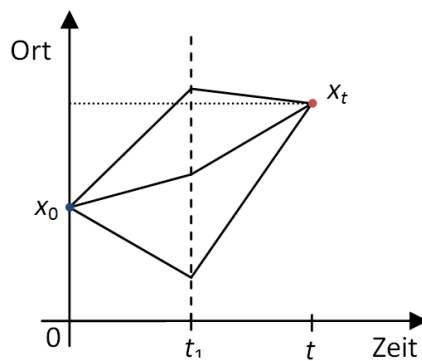


Abbildung 4: Zur Übergangsamplitude tragen alle möglichen (Linien-)Pfade von  $x_0$  nach  $x_t$  über  $x_1 = x(t_1)$  bei ( $N = 2$ ).

Den allgemeinen Fall der Zerlegung von  $t$  in  $N$  Teilintervalle erhält man ganz analog zur Vorgehensweise in (3.10) durch  $N-1$ -faches Einfügen von  $\hat{1} = \int dx_i | x_i \rangle \langle x_i |$  in (3.9):

$$A(x, t; x_0, t_0) = \underbrace{\int dx_1 \dots dx_{N-1}}_{\cong \sum \text{Pfade}} \underbrace{A_{x_N, x_{N-1}} \dots A_{x_2, x_1} A_{x_1, x_0}}_{\cong A_{\text{Pfad}}} \quad (3.12)$$

Die entsprechende Veranschaulichung von (3.12) liefert Abbildung 5.

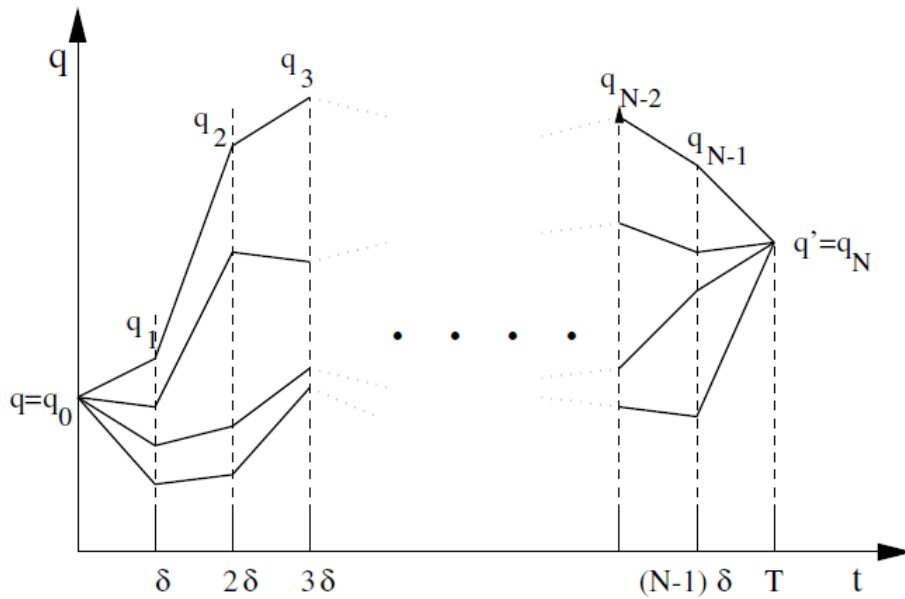


Abbildung 5: Übergangsamplitude als Summe über alle „N-beinigen“ Pfade;  $q \hat{=} x$ ,  $\delta \hat{=} \Delta t$ ,  $T \hat{=} t$ . (Aus [4], S.6)

Im Folgenden seien noch einige Anmerkungen zu (3.12) gegeben:

- 1) Es ist  $x_N = x(t_N) = x_t$ .
- 2) Über  $x_t$  und  $x_0$  wird nicht integriert.
- 3) Aufgrund der diskreten Einteilung des Zeitintervalls handelt es sich hier bei den Pfaden um gebrochene Linienpfade von  $x_0$  nach  $x_t$  – die Punkte  $x_0, x_1, \dots, x_t$  sind durch Geraden miteinander verbunden.
- 4) Der wesentliche Unterschied zur klassischen Mechanik besteht darin, dass alle Wege eine Rolle spielen, nicht nur der, für den nach dem Hamiltonschen Prinzip  $\delta S = 0$  gilt (s. Kap. 3.4).

### 3.3 Freies Teilchen

Die Übergangsamplitude eines freien Teilchens kann geschlossen berechnet werden. Mit dem Hamiltonoperator

$$H = T = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad (3.13)$$

ergibt sich die Übergangsamplitude zu:

$$A^{frei} = \langle x_t | e^{-i\lambda/2m \cdot \hat{p}^2} | x_0 \rangle \quad (3.14)$$

Unter Verwendung eines vollständigen Systems von Impulseigenzuständen

$$\hat{p}|p\rangle = p|p\rangle, \quad \langle p|\xi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{-\frac{i}{\hbar} p\xi}, \quad \int dp |p\rangle \langle p| = \hat{1} \quad (3.15)$$

folgt für die Übergangsamplitude:

$$\begin{aligned}
A^{frei} &= \langle x_t | e^{-\lambda/2m \cdot \hat{p}^2} | x_0 \rangle = \langle x_t | e^{-\lambda/2m \cdot \hat{p}^2} \int dp |p\rangle \langle p | x_0 \rangle = \int dp \langle x_t | e^{-\lambda/2m \cdot \hat{p}^2} | p \rangle \langle p | x_0 \rangle \\
&= \int dp e^{-\lambda/2m \cdot p^2} \langle x_t | p \rangle \langle p | x_0 \rangle = \int dp e^{-\lambda/2m \cdot p^2} \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \right)^2 \cdot e^{i/\hbar \cdot (x_t - x_0)p} \quad (3.16) \\
&= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp e^{-\lambda/2m \cdot p^2 + i/\hbar \cdot (x_t - x_0)p}
\end{aligned}$$

Hierbei wurde im 2. Schritt die Vollständigkeitsrelation durch Einfügen eines Eins-Operators berücksichtigt, daraufhin  $e^{-\lambda/2m \cdot \hat{p}^2}$  auf den Ket-Zustand  $|p\rangle$ , der Eigenzustand des Impulsoperators ist, angewendet und die übrig bleibenden Skalarprodukte gemäß (3.15) ausgewertet.

Mithilfe des Gaußintegrals

$$\int dy e^{-ay^2 + by} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{b^2/4a} \quad (3.17)$$

und der Identifikation  $a = \lambda/2m$ ,  $b = i/\hbar \cdot (x - x_0)$  folgt:

$$\begin{aligned}
A^{frei} &= \langle x_t | e^{-\lambda T} | x_0 \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{\frac{2m\pi}{\lambda}} e^{-\frac{m \cdot (x_t - x_0)^2}{2\lambda \cdot \hbar^2}} = \sqrt{\frac{m}{2\pi\lambda\hbar^2}} e^{-\frac{m}{2\lambda\hbar^2} \cdot (x_t - x_0)^2} \quad (3.18) \\
&= \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar t}} e^{\frac{i m}{\hbar} \frac{m}{2t} (x_t - x_0)^2}
\end{aligned}$$

*Anmerkung:* Streng genommen gilt (3.17) nur für  $Re(a) > 0$ , das  $a$  in dem Fall hier ist jedoch rein imaginär ( $\lambda = it/\hbar$ ). Durch Einfügen eines Faktors  $e^{-\varepsilon p^2}$  mit  $\varepsilon > 0$  und Grenzwertbetrachtung  $\varepsilon \rightarrow 0$  lässt sich die Verwendung der Formel jedoch rechtfertigen.

Auf das Resultat in (3.18) wird später bei der Herleitung des Pfadintegrals zurückgegriffen. Zunächst sei aber ein kurzer Einschub zur klassischen Lagrange-Mechanik gegeben, der den Bezug der freien Übergangsamplitude zur klassischen Wirkung hinsichtlich (1.1) verdeutlicht.

### 3.4 Einschub: Klassische Mechanik im Lagrange-Formalismus

Die Lagrange-Funktion eines eindimensionalen Teilchens ist gegeben durch:

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) := T - V = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \quad (3.19)$$

$$\text{mit } x = x(t), \dot{x} = \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Hierbei ist  $T$  die kinetische und  $V$  die potentielle Energie des Teilchens.

Die Wirkung ist definiert über

$$S[x] := \int d\tau \mathcal{L}(x(\tau), \dot{x}(\tau)) \quad (3.20)$$

und entspricht mathematisch somit einem Funktional der Lagrange-Funktion. Nach dem Hamiltonschen Prinzip verschwindet die Wirkung für den vom Teilchen angenommenen (klassischen) Weg:

$$\delta S[x] = 0 \quad (3.21)$$

$S[x]$  ist für den klassischen Pfad stationär und aus (3.21) folgt<sup>2</sup>:

<sup>2</sup> Für eine ausführliche Herleitung siehe [1], S.322 f.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \quad (3.22)$$

Mit der Lagrange-Funktion in (3.19) ergibt sich daraus:

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (3.23)$$

Für ein freies Teilchen ist  $V = 0$  und nach (3.23) gilt:

$$m\ddot{x} = 0 \Rightarrow \dot{x} = \text{const.} =: v \quad (3.24)$$

Der klassische Pfad eines freien Teilchens entspricht somit einer geraden Linie zwischen  $x_0 := x(0)$  und  $x_t := x(t)$  und für die Wirkung ergibt sich:

$$S^{\text{frei}}[x] = \int_0^t d\tau \frac{m}{2} v^2 = t \cdot \frac{m}{2} v^2 = \frac{tm}{2} \left( \frac{x_t - x_0}{t} \right)^2 \quad (3.25)$$

Der Vergleich von (3.25) mit (3.18) liefert:

$$A^{\text{frei}} \sim e^{i/\hbar \cdot S^{\text{frei}}} \quad (3.26)$$

Die quantenmechanische Übergangsamplitude des freien Teilchens enthält die Wirkung des klassischen Pfades im Argument der Exponentialfunktion entsprechend den Überlegungen von Dirac. Insbesondere liefert hier nur der klassische Pfad einen Beitrag.

### 3.5 Teilchen im Potential

In Anknüpfung an die in Abschnitt 3.2 angestellten Überlegungen soll nun die Übergangsamplitude für ein Teilchen im Potential  $V$  hergeleitet werden, was auf das Pfadintegral führen wird. Der Hamiltonoperator lautet in diesem Fall:

$$H = T + V = \frac{p^2}{2m} + V \quad (3.27)$$

Demnach folgt für die Übergangsamplitude:

$$A = \langle x_t | e^{-\lambda(T+V)} | x_0 \rangle = \langle x_t | \underbrace{e^{-\lambda/N \cdot (T+V)} \cdot \dots \cdot e^{-\lambda/N \cdot (T+V)}}_{N\text{-mal}} | x_0 \rangle \quad (3.28)$$

Hierbei wurde direkt die Zerlegung des Zeitintervalls wie in (3.9) eingefügt. Das Problem bei der Betrachtung eines Hamiltonoperators dieser Form liegt nun jedoch darin, dass i.A.  $[T, V] \neq 0$ , die Operatoren  $T$  und  $V$  also i.A. nicht kommutieren, und daher

$$e^{-\lambda/N \cdot (T+V)} := 1 - \frac{\lambda}{N} (T + V) + \frac{1}{2!} \frac{\lambda^2}{N^2} \underbrace{(T + V)^2}_{=T^2 + TV + VT + V^2, \neq 2TV} + \mathcal{O}(\lambda^3) \neq e^{-\lambda/N \cdot T} e^{-\lambda/N \cdot V}. \quad (3.29)$$

Die Auswertung von (3.28) stellt sich somit als etwas komplizierter dar und soll im Folgenden heuristisch betrachtet werden.

Es gilt:

$$e^{-\lambda(T+V)/N} = e^{-\lambda/N \cdot T} e^{-\lambda/N \cdot V} + \mathcal{O}(\lambda^2/N^2) \quad (3.30)$$

*Beweis:*



$$\begin{aligned}
& e^{\lambda/N \cdot T} e^{-\lambda(T+V)/N} e^{\lambda/N \cdot V} \\
&= \left(1 + \frac{\lambda}{N} T + \sigma\left(\frac{\lambda^2}{N^2}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{N} (T+V) + \sigma\left(\frac{\lambda^2}{N^2}\right)\right) \cdot \left(1 + \frac{\lambda}{N} V + \sigma\left(\frac{\lambda^2}{N^2}\right)\right) \\
&= 1 + \underbrace{\frac{\lambda}{N} V + \frac{\lambda}{N} T - \frac{\lambda}{N} (T+V)}_{=0} + \sigma\left(\frac{\lambda^2}{N^2}\right) = 1 + \sigma\left(\frac{\lambda^2}{N^2}\right)
\end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichung von links mit  $e^{-\lambda/N \cdot T}$  und von rechts mit  $e^{-\lambda/N \cdot V}$ , so folgt die Behauptung.

Als nächstes wird die  $N$ -te Potenz des Exponentialterms in (3.30) (vgl. Propagator) durch einen geeigneten Ausdruck ersetzt. Im Limes  $N \rightarrow \infty$  gilt nämlich:

$$\underbrace{[e^{-\lambda/N \cdot (T+V)}]_N}_{:=Y} = [e^{-\lambda/N \cdot T} e^{-\lambda/N \cdot V} + \sigma(\lambda^2/N^2)]^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \underbrace{[e^{-\lambda/N \cdot T} e^{-\lambda/N \cdot V}]_N}_{:=X} \quad (3.31)$$

*Beweis:*

$$X^N - Y^N = (X - Y)Y^{N-1} + X(X - Y)Y^{N-2} + X^2(X - Y)Y^{N-3} + \dots + X^{N-1}(X - Y)$$

Da wegen (3.30)

$$X - Y = \sigma(\lambda^2/N^2),$$

folgt:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (X^N - Y^N) = 0$$

Für den Propagator (3.28) ergibt dann sich mit der Ersetzung aus (3.31)

$$A = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle x_t | (e^{-\lambda/N \cdot T} e^{-\lambda/N \cdot V})^N | x_0 \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \prod_{n=0}^{N-1} \langle x_{n+1} | e^{-\lambda/N \cdot T} e^{-\lambda/N \cdot V} | x_n \rangle, \quad (3.32)$$

wobei wieder  $x_n = x(t_n)$  und speziell  $x_N = x_t$  ist.

Zur Auswertung der einzelnen Matrixelemente in (3.32) wird nun ausgenutzt, dass  $V$  im Ortsraum ein multiplikativer Operator ist und auf den Ket-Zustand angewendet:

$$e^{-\lambda/N \cdot V} | x_n \rangle = | x_n \rangle e^{-\lambda/N \cdot V(x_n)} \quad (3.33)$$

Mit (3.33) und (3.18) ( $\lambda \rightarrow \lambda/N$ ) folgt aus (3.32):

$$A = \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \left(\frac{mN}{2\pi\lambda\hbar^2}\right)^{N/2} \prod_{n=0}^{N-1} \exp\left[-\frac{mN(x_{n+1} - x_n)^2}{2\lambda\hbar^2} - \frac{\lambda V(x_n)}{N}\right] \quad (3.34)$$

Mit  $\Delta t = t/N = \hbar\lambda/iN$  und nach Zusammenfassen der exp-Funktionen ergibt sich für die Übergangsamplitude das Pfadintegral:

$$\boxed{A(x_t, t; x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 \dots dx_{N-1} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t}\right)^{N/2} \exp\left[\frac{i}{\hbar} \sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left\{ \frac{m}{2} \left(\frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t}\right)^2 - V(x_n) \right\}\right]} \quad (3.35)$$

### 3.6 Anmerkungen

Bei genauerer Betrachtung des Arguments der Exponentialfunktion in (3.35) wird der Bezug zur Wirkung deutlich. Für  $N \rightarrow \infty$ , d.h.  $\Delta t \rightarrow 0$  gilt nämlich

$$\sum_{n=0}^{N-1} \Delta t \left[ \frac{m}{2} \left( \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta t} \right)^2 - V(x_n) \right] \rightarrow \underbrace{\int_0^t d\tau \frac{m}{2} \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 - V(x)}_{\substack{\cong \mathcal{L} \\ \cong S[x]}}, \quad (3.36)$$

wobei  $x = x(\tau)$ .

Als symbolische Schreibweise des Pfadintegrals dient daher auch folgende Notation:

$$A = \langle x_t | e^{-i/\hbar H t} | x_0 \rangle = \int D x e^{i/\hbar S[x]} \quad (3.37)$$

mit

$$D x := D[x(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{\frac{N}{2}} dx(t_1) \dots dx(t_{N-1}) \quad (3.38)$$

sowie den Randbedingungen

$$x(0) = x_0 \text{ und } x(t) = x_t$$

Hierbei ist zu beachten, dass genau wie in (3.35) die Limesbildung  $N \rightarrow \infty$  erst nach der Integration durchzuführen ist.

Mathematisch handelt es sich beim Pfadintegral um ein unendlich-dimensionales Funktionalintegral, das als quantenmechanische Amplitude eine skalare Größe und somit frei von Operatoren ist, im Gegensatz zu den herkömmlichen Beschreibungen der Quantenmechanik nach Schrödinger bzw. Heisenberg.

*Zusammengefasst:* Das Pfadintegral lässt sich als Summe von  $e^{i/\hbar S[x]}$  über alle möglichen Pfade  $x(t)$  mit  $x(0) = x_0$  und  $x(t) = x_t$  auffassen, was besonders deutlich aus der Schreibweise (3.37) hervorgeht. Insbesondere enthält der Integrand des Pfadintegrals die klassische Wirkung  $S[x]$  der Pfade.

## 4. Klassischer Grenzfall

Eine erstaunliche Eigenschaft des Pfadintegrals ist, dass jeder Pfad - sei es der klassische oder ein beliebiger anderer - nach (3.37) mit einem Term  $e^{i/\hbar S[x]}$  beiträgt. Diese Terme sind jedoch alle vom Betrag Eins und tragen somit einzeln betrachtet gleichermaßen zum Pfadintegral bei. Insbesondere ist der klassische Pfad nicht weniger oder mehr berechtigt als jeder andere.

Einen Ausweg aus dieser Situation liefert die Betrachtung von Interferenz zwischen den Pfaden. Zudem ergibt sich für Wirkungen, die von erheblich größer Ordnung als das Wirkungsquantum  $\hbar$  sind, das Hamiltonsche Prinzip der kleinsten Wirkung.

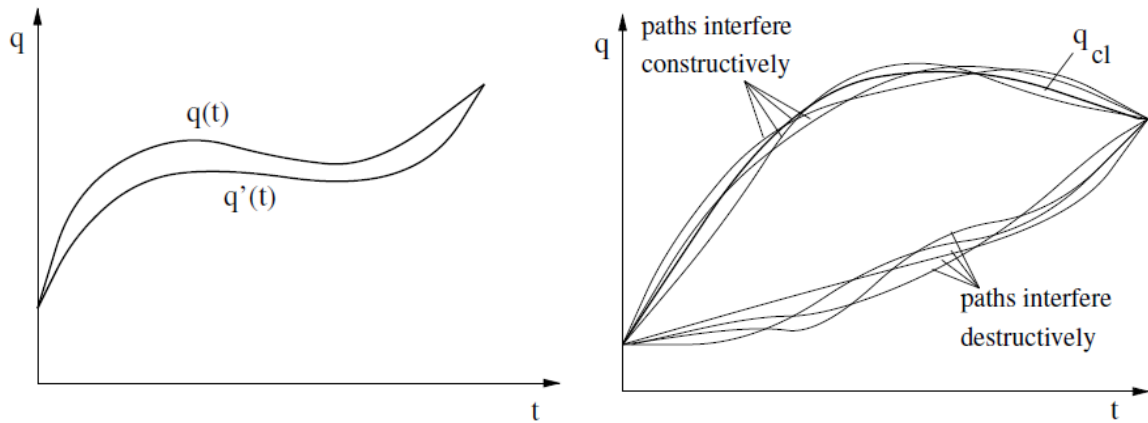


Abbildung 6: Zwei eng benachbarte Pfade, die zum Pfadintegral beitragen (links). Pfadinterferenzen in der Umgebung vom klassischen Pfad (rechts);  $q \hat{=} x$ . (Aus [4], S.13)

Bei der Betrachtung von zwei eng beieinander liegenden Pfaden  $x(t)$  und  $x'(t) = x(t) + \eta(t)$  mit  $\eta(t)$  klein (vgl. Abbildung 6, links) lässt sich die Wirkung  $S[x']$  in eine Taylorreihe entwickeln:

$$S[x'] = S[x + \eta] = S[x] + \int dt \frac{\delta S}{\delta x(t)} \delta \eta(t) + \sigma(\eta^2) \quad (4.1)$$

Die Pfade tragen mit  $e^{i/\hbar \cdot S[x]}$  und  $e^{i/\hbar \cdot S[x']}$  zum Pfadintegral und gemeinsam folgt mit (4.1):

$$A \simeq e^{iS[x]/\hbar} \left[ 1 + \exp \left( i \cdot \hbar^{-1} \int dt \frac{\delta S}{\delta x(t)} \delta \eta(t) \right) \right] \quad (4.2)$$

Hierbei wurden Terme der Ordnung  $\eta^2$  vernachlässigt. Der Term  $\Delta := \hbar^{-1} \int dt \frac{\delta S}{\delta x(t)} \delta \eta(t)$  tritt als Phasendifferenz ins Spiel und ist verantwortlich für die Interferenz zwischen den betrachteten Pfaden. Selbst für sehr eng benachbarte Pfade mit nur geringfügig unterschiedlichen Wirkungen verursacht ein hinreichend kleines  $\hbar$  eine große Phasendifferenz  $\Delta$  und führt im Mittel zu destruktiver Interferenz der Pfade.

Jedoch gilt speziell für den Pfad mit

$$\delta S[x^{cl}] = 0 \quad (4.3)$$

nach (4.1) für einen benachbarte Pfad:

$$S[x^{cl} + \eta] = S[x^{cl}] + \sigma(\eta^2) \quad (4.4)$$

Die Wirkungen zwischen diesem Pfad  $x^{cl}$  und einem eng benachbarten Pfad unterscheiden sich somit wesentlich weniger ( $\Delta \rightarrow 0$ ) als die Wirkungen zweier zufälliger, aber genauso eng benachbarter Pfade. Bei konstantem  $\hbar$  interferieren die Pfade in der Umgebung um  $x^{cl}$  aufgrund des kleinen  $\Delta$  im Mittel konstruktiv (s. Abbildung 6, rechts). Bei Wirkungen  $\gg \hbar$  (klassische Probleme) tragen dann nur noch die Pfade in unmittelbarer Nähe des Pfades  $x^{cl}$  bei, der nach (4.3) eine stationäre Wirkung besitzt. Dies wird aber gerade vom klassischen Pfad erfüllt, was dem Prinzip der kleinsten Wirkung in der klassischen Mechanik entspricht (s. Kap. 3.4).

## 5. Literatur

- [1] Gernot Münster: Quantentheorie, 2te Auflage, de Gruyter (2010)
- [2] R. Feynmann, A. Hibbs: Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill (1965)
- [3] L. S. Schulman: Techniques and Applications of Path Integration, John Wiley (1981)
- [4] Richard MacKenzie: Path Integral Methods and Applications, Lectures given in (2000), <http://arxiv.org/abs/quant-ph/0004090>