Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Institut für theoretische Physik
Sommersemester 2009
Veranstaltung: Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder
Dozenten: Prof. Dr. G. Münster, Priv.-Doz. Dr. J. Heitger
Verfasser: Rüdiger Haake

Irreversibilität des quantenmechanischen Messprozesses

In diesem Text soll erörtert werden, warum der quantenmechanische Messprozess irreversibel ist und wie diese Irreversibilität zu verstehen ist.

1. Beschreibung des Problems:

Jede quantenmechanische Messung ist irreversibel, weil der Anfangszustand des Systems nach der Messung nicht mehr rekonstruierbar ist. Durch eine Messung können wir zwar die Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten eines bestimmten Messwerts erhalten, doch diese definieren nicht allein den Systemzustand. Könnten wir noch zusätzlich die Phasenbeziehungen zwischen den möglichen Eigenzuständen messen, so ließe sich der Prozess prinzipiell rückgängig machen. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass eine Messung auch immer Informationsverlust bedeutet und dass eine Messung dementsprechend nicht rückgängig gemacht werden kann.

Als beispielhafter Messprozess wird hier eine Spin-Messung an einem Elektron beschrieben. Zunächst soll der Messprozess nur durch Betrachtung des gemessenen Teilchens beschrieben werden. Danach soll die Messapparatur in die Beschreibung miteinbezogen werden. Wir werden auch jeweils prüfen, an welcher Stelle und wodurch die Irreversibilität zustande kommt.

2. Messprozess als Zustandsreduktion des Elektron-Zustands:

Das gemessene System sei hier ein Elektron, bei dessen Betrachtung wir uns auf den Spinfreiheitsgrad in z-Richtung beschränken.

Vor der Messung liege das Elektron in einem reinen Zustand Ψ vor, der in Komponentendarstellung lautet:

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \text{ wobei } \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = a|+\rangle \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} = b|-\rangle$$

Nach der Messung – jedoch noch vor dem Ablesen des Ergebnisses – liegt der vorher reine Zustand nun als statistisches Gemisch vor. Wir können den genauen Zustand nicht mehr angeben.

Dieser Übergang – der nicht durch die unitäre Zeitentwicklung gemäß der Schrödingergleichung beschrieben werden kann – ist irreversibel.

2.1 Prüfung der Reversibilität:

Dass der Übergang irreversibel ist, wird klar, wenn man den statistischen Operator des Elektrons vor und nach der Messung betrachtet:

Vor der Messung liegt ein reiner Zustand vor:

$$\hat{\varrho}_0 = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \sum_n^{+/-} c_n |n\rangle \cdot \left(\sum_m^{+/-} c_n |m\rangle \right)^{\dagger} = \sum_{n,m}^{+/-} c_n c_m^* |n\rangle\langle m| \quad (1)$$

Den Ausdruck auf der rechten Seite können wir in Diagonal- und Interferenzterme aufteilen:

$$\sum_{n,m}^{+/-} c_n c_m^* |n\rangle\langle m| = \sum_n^{+/-} |c_n|^2 |n\rangle\langle n| + \sum_{n \neq m}^{+/-} c_n c_m^* |n\rangle\langle m| \quad (2)$$

Nach der Messung, aber noch vor dem Ablesen, liegt ein gemischter Zustand vor:

$$\hat{\varrho}_1 = \sum_n^{+/-} |c_n|^2 |n\rangle\langle n| \quad (3)$$

Bei der Interaktion, die zur Messung benötigt wird, sind die Interferenzterme des Zustands demnach verloren gegangen. Die Phasenbeziehung zwischen den beiden Spinkomponenten wurde zerstört, nur die Betragsquadrate der Komponenten blieben erhalten. Es kam zu einem „Informationsverlust“ und infolgedessen ist dieser Prozess irreversibel.

Nun wissen wir, dass die Irreversibilität einer Messung im Verlust der Phasenbeziehung während der Zustandsreduktion begründet ist. Wir wissen allerdings noch nicht, warum die Phasenbeziehung überhaupt verloren geht.

3. Messprozess als Zeitentwicklung des Systems „Elektron + Messapparatur“:

In der bisherigen Betrachtung haben wir die Messung als Zustandsänderung des Elektrons beschrieben. Die Messapparatur blieb bisher außen vor. Nun wollen wir das System „Elektron + Messapparatur“ als ein Gesamtsystem betrachten und als einen Produktzustand darstellen. Wie wir sehen werden, lässt sich die Kopplung und die nachfolgende gemeinsame Entwicklung durch zwei verschiedene zeitliche Entwicklungen beschreiben.

3.1 Kopplung des Elektrons an die Messapparatur:

Sei $|\Psi\rangle=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ der Zustand des Elektrons wie im vorherigen Beispiel und $|\Sigma\rangle$ der Zustand der makroskopischen Messapparatur. Die Messapparatur soll einen Zeiger haben, der nach links bzw. nach rechts ausschlägt, je nach dem ob für den Spin $m_s=1/2$ oder $m_s=-1/2$ gemessen wurde. Die Messapparatur muss makroskopisch sein, damit das Ergebnis abgelesen werden kann. Infolgedessen hängt der Zustand $|\Sigma\rangle$ auch von einer makroskopischen Anzahl von Freiheitsgraden ab. Zunächst ist aber lediglich der Freiheitsgrad wichtig, der die Position des Zeigers angibt. Zwischen dieser Koordinate $\hat{q}$ – die hier den Schwerpunkt des Zeigers angeben soll –, bzw. dem zugehörigen Impuls $\hat{p}$ und dem Elektron soll eine Interaktion als kurze Kopplung der beiden Zustände bestehen. Folgender Hamiltonoperator führt zu dieser Kopplung:

$$\hat{H}=2V(t)\hat{S}_z\hat{p} \quad (4)$$

Durch die zeitlich begrenzte Kopplung soll dem Zeiger an der Apparatur ein gewisser Impulsübertrag gegeben werden, der vom Spin des Elektrons abhängt. Die Geschwindigkeit *V(t)* soll so groß sein, dass obiger einfacher Hamiltonoperator *(4)* zur Beschreibung der Kopplung ausreicht – dass Terme der Kopplung höherer Ordnung also vernachlässigt werden können. $\hat{p}$ ist hierbei der Impulsoperator des Zeigers und $\hat{S}_z$ ist der Spinoperator für die z-Komponente.

Gleichung (4) beschreibt wie Elektron und Messapparatur miteinander interagieren. Während der Kopplung gilt obiger Hamiltonoperator für das Gesamtsystem.

Um nun dessen Zustand unmittelbar nach der Interaktion zu berechnen, führen wir die unitäre zeitliche Entwicklung durch, die durch die Schrödingergleichung gegeben ist:

$$|\Psi_{ges}'\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int \hat{H}(t)\,dt\right)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}|\Sigma\rangle \quad \textit{(5)}, \text{ wobei } \quad \int \hat{H}(t)\,dt = 2\hat{S}_z\,\hat{p}\int V(t)\,dt = 2\hat{S}_z\,\hat{p}\,L \quad \textit{(6)}$$

Eine Geschwindigkeit über die Zeit integriert ergibt einen Weg, der hier als *L* definiert wurde. *L* ist anschaulich die Länge des Weges, die der Zeiger zurücklegt, um das Ergebnis anzuzeigen.

Um *Gleichung (5)* weiter zu vereinfachen, setzt man *(6)* in *(5)* ein und stellt den Spinoperator $\hat{S}_z$ in seiner Spektraldarstellung dar. Das führt uns auf folgenden Operator für die Zeitentwicklung *U(t)*:

$$\hat{U}(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int \hat{H}(t)\,dt\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}2\mathrm{L}\,\hat{S}_z\,\hat{p}\right) = \exp(-iL\,\hat{p})|+\rangle\langle+| \; + \; \exp(+iL\,\hat{p})|-\rangle\langle-| \quad \textit{(7)}$$

Damit ergibt sich für den entwickelten Zustand des Gesamtsystems:

$$\Rightarrow |\Psi_{ges}'\rangle = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}\exp(-iL\,\hat{p})\cdot|\Sigma\rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}\exp(+iL\,\hat{p})\cdot|\Sigma\rangle \quad \textit{(8)}$$

Formulieren wir diesen Zustand noch ein wenig um, um ihn etwas anschaulicher darzustellen:

$$\Rightarrow |\Psi_{ges}'\rangle = a\exp(-iL\,\hat{p})\cdot|+\rangle|\Sigma\rangle \quad + \quad b\exp(+iL\,\hat{p})\cdot|-\rangle|\Sigma\rangle \quad \textit{(9)}$$

In dieser Darstellung sieht man deutlich, dass sich das Gesamtsystem nun in einer Superposition zweier Zustände befindet. Der erste Summand beschreibt den Zustand von Messapparatur und System für den Fall, dass „Spin up“ gemessen wird (der Zeiger der Messapparatur wird sich zu $q=L$ bewegen). Entsprechend stellt der zweite Summand den Zustand für die „Spin down“-Messung dar (der Zeiger der Messapparatur wird sich zu $q=-L$ bewegen). Da die beiden Zustände in *(9)* makroskopisch sind, haben wir hier formal eine Superposition zweier makroskopischer Zustände.

3.2 Prüfung der Reversibilität nach erfolgter Kopplung:

Ist die beschriebene Kopplung des Gesamtsystems und damit der Übergang in den Zustand $|\Psi_{ges}'\rangle$ bereits irreversibel? Ist also Information „verloren gegangen“? Nein, denn tatsächlich sind die Spinkomponenten *a* und *b* in diesem Zustand immer noch messbar. Der Anfangszustand ist also noch vollständig rekonstruierbar. Bisher wurde durch die Kopplung mittels *(4)* lediglich eine

Korrelation zwischen Elektron und Messapparatur erzeugt. Der Zeiger befindet sich noch nicht in seiner Ausgangsposition, die das Messergebnis anzeigt.

Um zu zeigen, dass *a* und *b* immer noch messbar sind, definieren wir folgenden Operator:

$$\langle \hat{A} \rangle = \hbar a b^* \quad (10)$$

Eine Rechnung ergibt, dass dieser Operator wie folgt realisiert werden kann:

$$\hat{A} := \hat{A}_1 + i \hat{A}_2 \quad \text{wobei} \quad \hat{A}_1 = \hat{S}_x \cos 2\mathrm{L}\, \hat{p} + \hat{S}_y \sin 2\mathrm{L}\, \hat{p} \quad \text{und} \quad \hat{A}_2 = \hat{S}_x \sin 2\mathrm{L}\, \hat{p} - \hat{S}_y \cos 2\mathrm{L}\, \hat{p}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \hat{S}_x (\cos 2\mathrm{L}\, \hat{p} + i \sin 2\mathrm{L}\, \hat{p}) + \hat{S}_y (\sin 2\mathrm{L}\, \hat{p} - i \cos 2\mathrm{L}\, \hat{p})$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & \cos 2\mathrm{L}\, \hat{p} + i \sin 2\mathrm{L}\, \hat{p} \\ \cos 2\mathrm{L}\, \hat{p} + i \sin 2\mathrm{L}\, \hat{p} & 0 \end{pmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\cos 2\mathrm{L}\, \hat{p} - i \sin 2\mathrm{L}\, \hat{p} \\ \cos 2\mathrm{L}\, \hat{p} + i \sin 2\mathrm{L}\, \hat{p} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{A} = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \exp(2 i L \hat{p}) \quad (11)$$

Nun haben wir den zu messenden Operator formuliert. Mithilfe des Zustands aus *Gleichung (9):*

$$|\Psi_{ges}'\rangle = a \exp(-iL\hat{p}) \cdot |+\rangle |\Sigma\rangle \quad + \quad b \exp(+iL\hat{p}) \cdot |-\rangle |\Sigma\rangle =: |\Psi_{ges,+}\rangle + |\Psi_{ges,-}\rangle$$

ergibt sich für den Erwartungswert:

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi_{ges} | \hat{A} | \Psi_{ges} \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \Psi_{ges} | \hat{A} | \Psi_{ges} \rangle = \langle \Psi_{ges,+} | \hat{A} | \Psi_{ges,+} \rangle + \langle \Psi_{ges,-} | \hat{A} | \Psi_{ges,-} \rangle + \langle \Psi_{ges,+} | \hat{A} | \Psi_{ges,-} \rangle + \langle \Psi_{ges,-} | \hat{A} | \Psi_{ges,+} \rangle \quad (12)$$

Der Operator wirkt auf den Spinanteil so, dass die „Spin up“-Komponente $|+\rangle$ zur „Spin down“-Komponente $|-\rangle$ wird. Die „Spin down“-Komponente wird eliminiert. In obigen Skalarprodukten ist die Spinkomponente des Zustands $\hat{A} |\Psi_{ges,-}\rangle$ also vernichtet und damit das Skalarprodukt gleich Null. Damit fallen die mittleren beiden Skalarprodukte weg. Das erste Produkt fällt ebenfalls weg, da dort „Spin up“ mit „Spin down“ skalarmultipliziert wird und die beiden Eigenzustände natürlich orthogonal zueinander sind. Es bleibt also lediglich die letzte Komponente:

$$\Rightarrow \langle \Psi_{ges} | \hat{A} | \Psi_{ges} \rangle = \langle \Psi_{ges,-} | \hat{A} | \Psi_{ges,+} \rangle \quad (13)$$

Einsetzen und ausrechnen führt zu

$$\Rightarrow \langle \hat{A} \rangle = \langle \Psi_{ges} | \hat{A} | \Psi_{ges} \rangle = \langle \Psi_{ges,-} | \hat{A} | \Psi_{ges,+} \rangle = \hbar a b^* \quad (14).$$

Zusammen mit der Gleichung für den Erwartungswert des Spins $\langle \hat{S}_z \rangle$,

$$\langle \hat{S}_z \rangle = \hbar \left\langle \frac{1}{2} sign(q) \right\rangle = \frac{\hbar}{2} (|a|^2 - |b|^2) \quad \textit{(15)},$$

erhalten wir bei Messung dieser beiden Observablen die vollständige Information über den Zustand des Elektrons vor der Messung – abgesehen von einem Phasenfaktor, der jedoch für beide Komponenten *a* und *b* gleich ist. Physikalisch sind die beiden Zustände aber identisch. Bis hierhin ist also keine Information verloren gegangen, wir könnten den Prozess noch rückgängig machen. Wir könnten jedoch auch nicht ablesen, ob die Zeigerposition bei $q = L$ oder bei $q = -L$ ist.

3.3 Zeitliche Entwicklung des Gesamtsystems nach erfolgter Kopplung:

Der nächste Schritt der Messung besteht darin, die Zeigerbewegung abzuwarten, um das Ergebnis schließlich ablesen zu können. Nach erfolgter Kopplung vergehe nun also eine bestimmte Zeit *t*. Der Zustand entwickelt sich wiederum mithilfe der unitären Zeitentwicklung der Schrödingergleichung:

$$\Rightarrow |\Psi_{ges}''\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}\right) \left[\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \exp(-iL\hat{p}) \cdot |\Sigma\rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \exp(+iL\hat{p}) \cdot |\Sigma\rangle \right] \quad \textit{(16)}$$

Bei dem in der Zeitentwicklung benutzten Hamiltonoperator handelt es sich natürlich nicht um den Operator aus *Gleichung (4)*. Die Kopplung ist bereits beendet, der Hamiltonoperator beschreibt jetzt nun einfach das System „Elektron + Messapparatur".

3.4 Prüfung der Reversibilität nach zeitlicher Entwicklung:

Der Erwartungswert der Observable *A*, der zusammen mit dem des Spins die Information über den Anfangszustand enthält, hat nun folgende Gestalt:

$$\langle \hat{A} \rangle = \hbar a b^* \int \left(\exp\left(-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}\right) \exp(i L \hat{p}) |\Sigma\rangle \right)^* \cdot \exp(2 i L \hat{p}) \cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}\right) \cdot \exp(-i L \hat{p}) |\Sigma\rangle \, d^N q \quad \textit{(17)}$$

Dieses Ergebnis ergibt sich analog zur Rechnung, die zu *Gleichung (14)* führte. In diesem Fall fällt das Integral jedoch auf Grund des Zeitentwicklungsoperators nicht weg.

Gleichung (17) können wir vereinfachen. Der Ausdruck $\exp(i L \hat{p}) \cdot \exp(-i/\hbar\ t \hat{H}) \cdot \exp(-i L \hat{p})$ beschreibt die Entwicklung des Operators $\exp(-i/\hbar\ t \hat{H})$ mit $\exp(-i L \hat{p})$. Letztere Exponentialfunktion sorgt im Hamiltonoperator für eine Verschiebung der $\hat{q}$ -Koordinate.

Es gilt also:

$$\exp(i L \hat{p}) \cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}\right) \cdot \exp(-i L \hat{p}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}(\hat{q}+L)\right) \quad \textit{(18)}$$

Wenn wir jetzt *Gleichung (17)* so umformen, dass die Exponentialfunktionen zwischen $|\Sigma\rangle^*$ und $|\Sigma\rangle$ stehen und dann *Gleichung (18)* ausnutzen, so stellen wir fest, dass gilt:

$$\langle \hat{A} \rangle = \hbar a b^* \left\langle \exp\left(\frac{i}{\hbar} t \hat{H}(\hat{q}-L)\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}(\hat{q}+L)\right) \right\rangle \quad \textit{(19)}$$

Würde der Hamiltonoperator nun nicht von der Schwerpunktskoordinate q des Zeigers abhängen, so hätte sich die Messsituation nicht geändert. Der Koeffizient für $\hbar a b^*$ wäre zeitunabhängig und es würde genau wie unmittelbar nach der Kopplung *Gleichung (10)* gelten. Doch davon können wir nicht ausgehen. Die Energie des Systems wird je nach Position des Zeigers schwanken – wenn auch minimal. Interessant ist, wie sich der Koeffizient nach einer kurzen Zeit t verändert. Wir betrachten hier den Absolutwert, dabei gilt für kleine t die Näherung:

$$\left| \left\langle \exp\left(\frac{i}{\hbar} t \hat{H}(\hat{q}-L)\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}(\hat{q}+L)\right) \right\rangle \right|^2 = 1 - t^2 \delta \hat{H}^2 \ldots \quad \textit{(20)}$$

Der Term $\delta H^2 = \left\langle \left[\hat{H}(\hat{q}-L)/\hbar - \hat{H}(\hat{q}+L)/\hbar\ -\ \langle \hat{H}(\hat{q}-L)/\hbar - \hat{H}(\hat{q}+L)/\hbar \rangle \right]^2 \right\rangle$ ist das Quadrat der Streuung bei einer Messung von $\hat{H}(\hat{q}-L)/\hbar - \hat{H}(\hat{q}+L)/\hbar$. Anschaulich repräsentiert δH demnach die Streuung der Messwerte für die Energiedifferenz der Messapparatur bei beiden Messergebnissen. Diese kommt durch die vielen anderen Freiheitsgrade der Messapparatur zustande.

Da das Betragsquadrat gegen Null strebt, wird das auch der eigentliche Koeffizient tun. Wenn dieser nun quasi Null ist, dann können wir den Erwartungswert $\langle \hat{A} \rangle$ nicht mehr messen. Der Anfangszustand lässt sich aus dieser Messung nicht mehr rekonstruieren.

Der Zustand, in dem sich das Gesamtsystem befindet, ist allerdings immer noch ein reiner Zustand. Schließlich haben wir einen reinen Zustand unitär zeitentwickelt und wir wissen, dass die benutzte Zeitentwicklung reine Zustände nur in reine Zustände umwandeln kann.

Wir können also erwarten, dass wir einen selbstadjungierten Operator finden können, dessen Erwartungswert $\langle \hat{A}' \rangle = \hbar a b^*$ entspricht. Die Messung dieses Operators würde uns die Rekonstruktion des Anfangszustands ermöglichen. Es eignet sich der folgende Operator:

$$\hat{A}' = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}\right) \hat{A} \exp\left(\frac{i}{\hbar} t \hat{H}\right) \quad \textit{(21)}$$

Dieser selbstadjungierte Operator ist eine „Konstante der Bewegung". Entwickeln wir das System zeitlich nach der Bewegungsgleichung – also in diesem Fall nach der Schrödingergleichung – so bleibt diese Größe konstant. Vergewissern wir uns, dass der Erwartungswert dieses Operators den gewünschten Wert hat:

$$\langle \hat{A}' \rangle = \left\langle \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}\right) \hat{A} \exp\left(\frac{i}{\hbar} t \hat{H}\right) \right\rangle = \langle \Psi_{ges}'' | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}\right) \hat{A} \exp\left(\frac{i}{\hbar} t \hat{H}\right) | \Psi_{ges}'' \rangle$$

$$\Rightarrow \langle \hat{A}' \rangle = \langle \Psi_{ges}'' | \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}\right) \hat{A} \exp\left(\frac{i}{\hbar} t \hat{H}\right) | \Psi_{ges}'' \rangle = \langle \Psi_{ges}' | \hat{A} | \Psi_{ges}' \rangle = \hbar a b^* \quad \textit{(22)}$$

Anschaulich sorgen die Exponentialfunktionen für die „Rückrechnung" des Zustands $|\Psi_{ges}''\rangle$ auf den Zustand $|\Psi_{ges}'\rangle$. Die Messung dieses Erwartungswertes liefert also immer den gleichen Wert – unabhängig von der verstrichenen Zeit *t*.

Den Operator selbst können wir analog zu *Gleichung (11)* darstellen:

$$\hat{A}' = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \exp(2 i L \hat{p}') \quad \textit{(23)}, \text{ wobei } \quad \hat{p}' = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} t \hat{H}\right) \hat{p} \exp\left(\frac{i}{\hbar} t \hat{H}\right) \quad \textit{(24)}.$$

Hier führen wir die „zeitliche Rückrechnung" direkt für die Impulse durch, weil nur die Impulse in *(11)* zeitabhängig sind. Machen wir uns klar, von welchen Variablen $\hat{p}'$ abhängt: kennen wir diesen Operator, so können wir im Prinzip auch den Erwartungswert $\langle \hat{A}' \rangle = \hbar a b^*$ berechnen.

$\hat{p}'$ ist der Impuls des Zeigerschwerpunkts unmittelbar nach der Kopplung, den wir in Abhängigkeit von $\hat{p}$ – dem Impuls desselben – nach einer Zeit t betrachten. Der Impuls des Zeigerschwerpunkts nach einer Zeit *t* wird von den anderen Koordinaten und Impulsen, also von den $2\mathrm{N}-1$ weiteren Freiheitsgraden der Messapparatur abhängen. Der Zeiger ist schließlich nicht unabhängig vom Rest des Messgeräts. Damit wir aber nach Gleichung *(24)* $\hat{p}'$ aus $\hat{p}$ „zurückrechnen" können, müssten alle $2\mathrm{N}-1$ weiteren Freiheitsgrade bekannt sein. Genau hier ist das Problem: Wir haben zwar einen selbstadjungierten Operator $\hat{A}'$ finden können, der eine Rekonstruktion des Anfangszustands zulässt, allerdings ist dieser Operator nicht messbar. Um ihn messen zu können, müssten wir alle Koordinaten und Impulse des Gesamtsystems zur Zeit *t* messen – und das in nur einer einzigen Messung, weil die $2\mathrm{N}$ Variablen des Systems nicht kommutieren. Gleichzeitig muss der Hamiltonoperator natürlich bekannt sein, was wir bisher stillschweigend vorausgesetzt haben.

Im Gegensatz zur Beschreibung im ersten Abschnitt dieses Textes – bei der die Messung einen Übergang des reinen Systemzustands in ein Gemisch beschreibt – ist dieser Vorgang jedoch nicht prinzipiell irreversibel. Es liegt immer noch ein reiner Zustand des Gesamtsystems vor. Wir könnten den Anfangszustand rekonstruieren, wenn wir in der Lage wären, oben beschriebene Messung durchzuführen. Allerdings ist die Durchführung einer solchen Messung in der Praxis natürlich vollkommen unmöglich.

4. Zusammenfassung:

Fassen wir noch einmal zusammen, was wir festgestellt haben. Wir haben bei der Betrachtung des quantenmechanischen Messprozesses zunächst lediglich den Zustand des gemessenen Teilchens betrachtet und dabei festgestellt, dass sich der vorher reine Zustand in ein Gemisch umwandelt. Da die Interferenzterme des gekoppelten Zustands im Gemisch nicht mehr vorhanden waren und somit Information verloren gegangen war, haben wir den Schluss gezogen, dass der Übergang vom reinen Zustand zum Gemisch irreversibel ist. Allerdings konnten wir zu diesem Zeitpunkt noch nicht erklären, warum dies so ist.
Dafür zogen wir die Messapparatur mit in die Betrachtung ein und stellten den Messprozess als Kopplung mit anschließender unitärer Zeitentwicklung des Gesamtsystems dar. Wir haben festgestellt, dass die idealisierte Kopplung – also die bloße Korrelation der beiden Teilzustände – noch reversibel ist. Die ganz normale Zeitentwicklung, die benötigt wird, um den Messwert ablesen zu können, lässt den Messprozess dagegen irreversibel werden.
Die Interaktion der makroskopisch vielen Freiheitsgrade führt dazu, dass wir den Anfangszustand nur rekonstruieren können, wenn wir die Werte aller Freiheitsgrade messen würden.

Halten wir also fest: Durch die Unmöglichkeit der Messung aller Freiheitsgrade einer makroskopischen Apparatur wird der Anfangszustand nicht rekonstruierbar sein und der quantenmechanische Messprozess ist irreversibel.

5. Literaturangaben:

Peres, Asher. Can we undo quantum measurements? In: Physical Review D22 (1980): 879-893.

Peres, Asher. Quantum Measurements Are Reversible. In: American Journal of Physics 42 (1974), 886-891.

Münster, Gernot. Quantentheorie, Berlin 2006.