

Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

Aharonov-Bohm-Effekt

Rafael Frieling

21. September 2009

1 Einleitung

1959 sagten Yakir Aharonov und David Bohm in einer Veröffentlichung in der Physical Review den später nach ihnen benannten Effekt voraus. Die Situation ist dabei wie folgt: Es handelt sich um ein Doppelspaltexperiment mit Elektronen, bei dem im Bereich hinter dem Doppelspalt ein Magnetfeld in einer dünnen Spule lokalisiert ist ($\vec{B} = 0$ außerhalb der Spule), diese Situation ist in Abbildung 1 dargestellt. Der Aharonov-Bohm-Effekt besagt, dass die Anwesenheit des magnetischen Feldes das Interferenzmuster beeinflusst, obwohl die Elektronen nur durch Gebiete mit $\vec{B} = 0$ laufen.

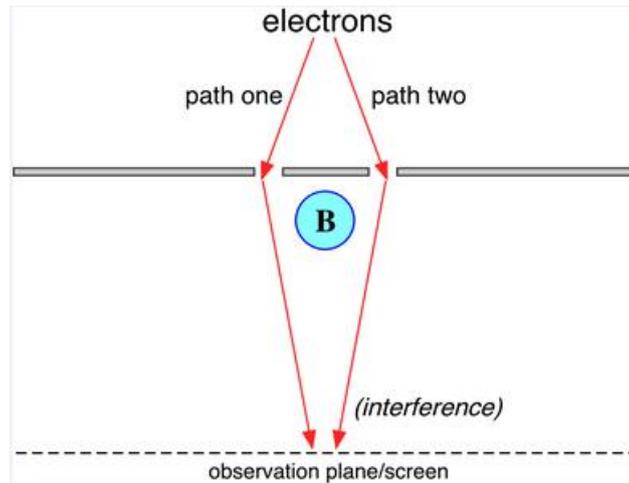


Abbildung 1: Experimenteller Aufbau

Da die Elektronen also nicht durch ein Feld beeinflusst werden, muss es eine andere Größe geben, die dies tut. In der Quantenmechanik sind im Gegensatz zur klassischen Physik die Potentiale die entscheidenden Größen und nicht die Felder. Die Potentiale sind jedoch nicht eindeutig (Eichfreiheit), aber die dazugehörigen Felder sind invariant unter Transformationen:

$$\begin{aligned}\vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad}\Lambda \\ \text{rot}\vec{A} &= \vec{B} \\ \text{rot}\vec{A}' &= \text{rot}\vec{A} + \text{rotgrad}\Lambda = \text{rot}\vec{A} = \vec{B}\end{aligned}$$

Dabei ist \vec{B} die magnetische Flussdichte und \vec{A} das Vektorpotential. Die Potentiale sind nicht eichinvariant, aber die Linienintegrale der Potentiale sind eichinvariant.

Zur weiteren Betrachtung brauchen wir den Stokes'schen Integralsatz:

$$\int_F (\text{rot}\vec{T}) d\vec{F} = \oint_C \vec{T} d\vec{r}$$

Dabei sei F eine Fläche, die von der Kurve C berandet wird und \vec{T} ein beliebiges Vektorfeld. Wir werden in den späteren Rechnungen sehen, dass die Elektronen nur durch eichinvariante Linienintegrale beeinflusst werden:

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} \vec{A} d\vec{r} &= \int_S (\text{rot}\vec{A}) d\vec{f} = \int_S \vec{B} d\vec{f} = \Phi \\ \oint_{\partial S} \vec{A}' d\vec{r} &= \int_S (\text{rot}\vec{A}') d\vec{f} = \int_S \vec{B} d\vec{f} = \Phi\end{aligned}$$

2 Herleitung des Aharonov-Bohm-Effektes im Pfadintegralformalismus

Für die Rechnung im Pfadintegralformalismus sei das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar = 1$. Die quantenmechanische Übergangsamplitude vom Ort \vec{y} zur Zeit t_0 zum Ort \vec{x} zur Zeit t_1 ist gegeben durch:

$$\langle x | e^{-iHt} | y \rangle = \int \mathcal{D}x e^{iS[x]}$$

Das Differential bedeutet $\mathcal{D}x = \mathcal{D}[x(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \epsilon}\right)^{\frac{N}{2}} dx(t_1) \dots dx(t_{N-1})$.

Das Funktional $S[x]$ ist die Wirkung, für die gilt: $S[x] = \int_{t_a}^{t_b} L(x, \dot{x}, t) dt$, dabei ist $L(x, \dot{x}, t)$ die Lagrangefunktion.

Wir wollen die Übergangsamplitude vom Ort \vec{y} der Elektronenquelle zur Zeit t_0 zu einem Ort \vec{x} zur Zeit t_1 auf dem Schirm berechnen:

Die Wirkung ist definiert als:

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt \quad (1)$$

Die Lagrangefunktion für ein Teilchen im Magnetfeld lautet:

$$L = \frac{m}{2} \vec{r}^2 + e \vec{r} \vec{A}(\vec{r}) \quad (2)$$

Mit der Lagrangefunktion $L_0 = \frac{m}{2} \vec{r}^2$ eines freien Teilchens, lässt sich Gleichung 2 umformen zu:

$$L = L_0 + e \vec{r} \vec{A}(\vec{r}) \quad (3)$$

Damit folgt für die Wirkung:

$$S = S_0 + e \int_{t_0}^{t_1} \vec{A}(\vec{r}(t)) \vec{r} dt \quad (4)$$

$$= S_0 + e \int_{\vec{y}}^{\vec{x}} \vec{A}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (5)$$

Dabei wurde benutzt, dass $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}$, $\vec{r}(t_0) = \vec{y}$ und $\vec{r}(t_1) = \vec{x}$. Jetzt seien C_a und C_b zwei Wege von \vec{y} nach \vec{x} , die links an der Spule vorbeiführen (siehe Abbildung 2). Diese Art von Wegen soll im weiteren Text vom Typ 1 sein.

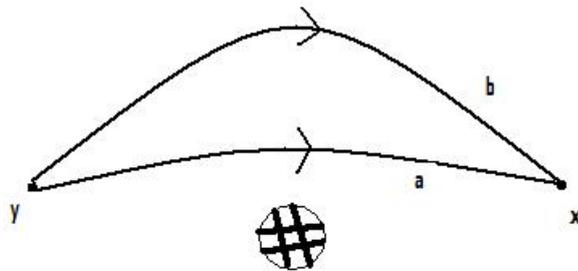


Abbildung 2: Wege vom Typ 1

F_1 ist die von den Wegen C_a und C_b eingeschlossene Fläche im feldfreien Raum. Dann gilt unter Verwendung der Maxwellgleichungen und des Stokes'schen Integralsatzes:

$$\int_{C_a} \vec{A} d\vec{r} - \int_{C_b} \vec{A} d\vec{r} = \oint_{C_a-C_b} \vec{A} d\vec{r} = \int_{F_1} \vec{\nabla} \times \vec{A} d\vec{f} = \int_{F_1} \vec{B} d\vec{f} = 0 \quad (6)$$

Daraus folgt, dass für alle Wege C_1 vom Typ 1 gilt, dass $\int_{C_1} \vec{A} d\vec{r} = \alpha_1$, wobei α_1 eine Konstante ist. Eine analoge Rechnung liefert für Wege, die rechts an der Spule vorbeiführen (Typ 2): $\int_{C_2} \vec{A} d\vec{r} = \alpha_2$

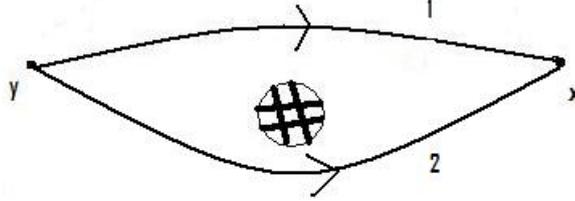


Abbildung 3: Wege vom Typ 1 und Typ 2

Jetzt zerlegen wir das Pfadintegral für die Übergangsamplitude in Integrale über Wege vom Typ 1 und vom Typ 2:

$$\langle \vec{x}, t_1 | \vec{y}, t_0 \rangle = \int \mathcal{D}x e^{iS} = \int^{(1)} \mathcal{D}x e^{iS} + \int^{(2)} \mathcal{D}x e^{iS} \quad (7)$$

Wenn wir unseren Ausdruck von oben für die Wirkung einsetzen gilt:

$$\int^{(1)} \mathcal{D}x e^{iS} = \int^{(1)} \mathcal{D}x e^{iS_0} e^{i\alpha_1} = K_1 e^{i\alpha_1} \quad (8)$$

Analog gilt für Wege vom Typ 2:

$$\int^{(2)} \mathcal{D}x e^{iS} = \int^{(2)} \mathcal{D}x e^{iS_0} e^{i\alpha_2} = K_2 e^{i\alpha_2} \quad (9)$$

Wenn man beides einsetzt, erhält man für die Übergangsamplitude:

$$\langle \vec{x}, t_1 | \vec{y}, t_0 \rangle = K_1 e^{i\alpha_1} + K_2 e^{i\alpha_2} = e^{ie\alpha_1} (K_1 + K_2 e^{ie(\alpha_2 - \alpha_1)}) \quad (10)$$

Für die Phase $\alpha_2 - \alpha_1$ gilt:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = \int_{C_2} \vec{A} d\vec{r} - \int_{C_1} \vec{A} d\vec{r} = \oint_{C_2-C_1} \vec{A} d\vec{r} = \int_F \vec{B} d\vec{f} = \Phi \quad (11)$$

Dabei ist Φ der magnetische Fluss durch die Spule. Der Betrag der Übergangsamplitude, welcher der Intensität auf dem Schirm entspricht, ist gegeben durch:

$$| \langle \vec{x}, t_1 | \vec{y}, t_0 \rangle | = | K_1 + K_2 e^{ie\Phi} | \quad (12)$$

Wir folgern daraus, dass das Interferenzmuster vom magnetischen Fluss Φ abhängt. Wenn man Beiträge von Pfaden berücksichtigt, die mehrfach um die Spule laufen, dann folgt für die Übergangsamplitude:

$$| \langle \vec{x}, t_1 | \vec{y}, t_0 \rangle | = \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} K_n e^{ine\Phi} \right| \quad (13)$$

Für $e\Phi = 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ ist das Interferenzmuster gleich dem ohne magnetisches Feld. Als Fazit können wir festhalten, dass die Elektronen zwar durch den feldfreien Raum laufen, aber vom Vektorpotential $\vec{A}(\vec{r})$ beeinflusst werden, aber nur durch die eichinvarianten Linienintegrale der Form $\oint \vec{A} d\vec{r}$.

3 Topologische Betrachtungen

Wir hatten bei der Berechnung im Pfadintegralformalismus die Pfade in zwei Klassen unterteilt: Typ 1 links an der Spule vorbei, Typ 2 rechts an der Spule vorbei. Außerdem gab es noch Beiträge von Pfaden, die sich mehrfach um die Spule winden. Die Windungszahl ist dabei die Anzahl Umläufe um einen bestimmten Punkt im Uhrzeigersinn minus die Anzahl der Umläufe gegen den Uhrzeigersinn. Die Klassifizierung der Pfade und die Windungszahl stellen die Verbindung zur Topologie des Problems dar. Dazu brauchen wir aber erst noch ein paar mathematische Definitionen.

- Eine Teilmenge $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Gebiet**, wenn gilt:
 1. G ist **offen**, d.h. zu jedem $x_0 \in G$ liegt eine ganze ϵ -Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ ganz in G .
 2. G ist **zusammenhängend**, d.h. zu je zwei Punkten x_0, y_0 aus G gibt es eine reguläre Kurve $w : [a, b] \rightarrow G$ mit $w(a) = x_0$ und $w(b) = y_0$
- Ein Gebiet G , in dem das Innere jeder ganz in G verlaufenden geschlossenen Kurve zu G gehört, heißt **einfach zusammenhängend**. Anschaulich:
Ein einfach zusammenhängendes Gebiet besitzt keine Löcher.
- Ein Gebiet heißt **mehrfach zusammenhängend**, wenn es nicht einfach zusammenhängend ist.
- Ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet erhält man, wenn man aus einem einfach zusammenhängenden Gebiet ein Stück herauschneidet.
- f ist homotop zu g (schreibe $f \sim g$), wenn es eine stetige Funktion $h : X \times I \rightarrow Y$ auf dem Intervall $I=[0,1]$ gibt, so dass für alle $x \in X$ gilt:

$$h(x, 0) = f(x) \quad (14)$$

$$h(x, 1) = g(x) \quad (15)$$

X, Y sind topologische Räume. Homotopie bedeutet also, dass f stetig in g umgewandelt werden kann.

Die Definition für Homotopie von Pfaden ist analog zu der von Funktionen. In einem **einfach zusammenhängenden Gebiet** sind Pfade mit gleichem Anfangs- und Endpunkt immer homotop zueinander. In einem **mehrfach zusammenhängenden Gebiet** sind dagegen nur Pfade homotop zueinander, wenn sie an der gleichen Seite um die Ausparung herumlaufen. Außerdem sind nur Pfade mit gleicher Windungszahl zueinander homotop. Wir können also alle möglichen Pfade nach Windungszahl und Laufrichtung in sogenannte Homotopieklassen einteilen. Diese topologischen Betrachtungen wollen wir nun auf den Aharonov-Bohm-Effekt übertragen. Die Topologie liefert eine allgemeine Aussage über Homotopie von Pfaden auf mehrfach zusammenhängenden Gebieten (ohne Verwendung von physikalischen Gleichungen), ein Spezialfall davon ist wie wir gesehen haben der Aharonov-Bohm-Effekt. Es handelt sich um ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet, denn die Spule ist für die Elektronen eine verbotene Zone, gehört also nicht zur Menge dazu. Anfangspunkt der Pfade ist die Elektronenquelle, Endpunkt der Schirm und die Spule ist das „Loch“ in der Menge. Die Homotopieklassen entsprechen dann genau den Klassen von Pfaden, die wir bei der Berechnung schon eingeführt hatten. Typ 1: Pfade, die links an der Aussparung vorbeilaufen, Typ 2: Pfade, die rechts an der Aussparung vorbeilaufen und jetzt noch Pfade mit Windungszahl n . Es ist also eine rein mathematische Herleitung des Effektes möglich, welche nicht auf magnetische Felder beschränkt ist.

4 Experimentelle Bestätigung des Aharonov-Bohm-Effektes

Die erste experimentelle Bestätigung des Aharonov-Bohm-Effektes erfolgte 1960 durch Chambers an der University of Bristol. Das wohl bekannteste Experiment zur Bestätigung wurde 1962 von Möllenstedt und Bayh durchgeführt. Der experimentelle Aufbau dieses Experimentes ist in Abbildung 4 schematisch dargestellt.

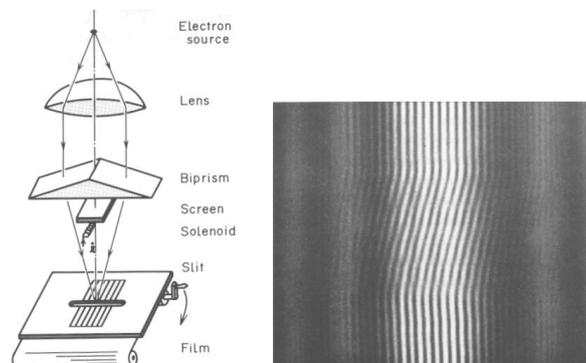


Abbildung 4: Links: Schematischer Versuchsaufbau; Rechts: Interferenzmuster

Das Interferenzmuster hat im unteren und oberen Bereichen parallele Linien, die durch einen konstanten Spulenstrom zu Stande kommen. Im mittleren Bereich sind die Linien schief, was daran liegt, dass der Spulenstrom variiert wird. Die Veränderung des Spulenstromes führt zu einem veränderten magnetischen Fluss durch die Spule, was den Phasenunterschied der beiden Teilwellen beeinflusst und somit zu einem veränderten Interferenzmuster führt. Der experimentelle Nachweis wurde lange Zeit angezweifelt, ist aber inzwischen anerkannt.