

Symmetriebrechung und Goldstone-Theorem

Seminar zur Theorie der Teilchen und Felder

Ingo Burmeister

02. Juli 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Symmetrie	3
1.2	Motivation	3
2	Symmetriebrechung	3
2.1	Coleman-Theorem	3
2.2	Spontane Symmetriebrechung beim Ferromagneten	4
2.3	Beispiel exakter Symmetrie	4
2.4	Das Goldstone-Modell	5
2.5	Das Goldstone-Theorem	6
3	Der Higgs-Mechanismus	7
3.1	Einleitung	7
3.2	Der Higgs-Mechanismus	7
3.3	Das Higgs-Boson	9
4	Zusammenfassung	9
4.1	Goldstone-Theorem	9
4.2	Higgs-Mechanismus	9
5	Literatur	10

1 Einleitung

1.1 Symmetrie

Symmetrie ist die Eigenschaft eines Systems, invariant unter einer Transformation zu bleiben. In der Physik sind Symmetrien oft grundlegende Prinzipien und von enormer Wichtigkeit. Sie treten in verschiedenen Theorien auf und helfen oft Modelle zu entwickeln und zu vereinfachen. Das Noether-Theorem verknüpft kontinuierliche Symmetrien mit Erhaltungsgrößen. Somit folgen alleine aus Symmetriebetrachtungen schon einige Informationen über das System.

Symmetrien können aber auch gebrochen sein, so wie aus zahlreichen Beispielen bekannt.

1.2 Motivation

Aus der Natur sind, abgesehen von zahlreichen exakten Symmetrien, auch gebrochene Symmetrien bekannt. So sind zum Beispiel die Ladungskonjugation (C), die Paritätssymmetrie (P) und auch ihre Kombination (CP) gebrochen. Gerade der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung (s.u.) ist sehr hilfreich bei verschiedenen Problemen.

In der schwachen Wechselwirkung verletzen Massenterme für die Eichbosonen und die Fermionen, wenn sie einfach per Hand eingefügt werden, die Eichinvarianz. Eine mögliche Lösung dieses Problems bietet der Higgs-Mechanismus, welcher auf dem Prinzip der spontanen Symmetriebrechung beruht und im Folgenden diskutiert wird.

In der starken Wechselwirkung sind die C- und P-Symmetrien und damit auch die CP-Symmetrie ungebrochen, was sich im verschwindenden Dipolmoment des Neutrons äußert. Diese Tatsache wird als das starke CP-Problem bezeichnet und ein Lösungsansatz beruht auf der Einführung einer spontan gebrochenen Peccei-Quinn-Symmetrie.

In der Natur sind einige gebrochene Symmetrien realisiert. Weiter ist der Mechanismus der spontanen Symmetriebrechung ein hilfreiches Instrument der theoretischen Physik ist.

2 Symmetriebrechung

Eine Symmetrie kann auf verschiedene Weise gebrochen sein. Unterschieden wird danach, ob das System selbst oder sein Grundzustand eine Symmetrie bricht.

2.1 Coleman-Theorem

Sei ein System beschrieben durch eine Bewegungsgleichung (z.B. \mathcal{L}) und den Grundzustand ϕ_0 (z.B. Vakuum), so gibt es folgende Möglichkeiten:

1. \mathcal{L} und ϕ_0 sind invariant unter einer Symmetrietransformation: exakte Symmetrie / Wigner-Weyl-Phase
2. \mathcal{L} ist invariant und ϕ_0 nicht: spontan gebrochene Symmetrie / Nambu-Goldstone-Phase
3. \mathcal{L} und ϕ_0 sind beide nicht invariant: explizite Symmetriebrechung

Dabei ist zu bemerken, dass nicht die Lagrange-Dichte \mathcal{L} , sondern die Euler-Lagrange-Gleichungen für Felder die Bewegungsgleichung darstellen.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (1)$$

Wenn allerdings die Lagrange-Dichte invariant unter einer Transformation ist, so gilt das auch für die Bewegungsgleichung.

2.2 Spontane Symmetriebrechung beim Ferromagneten

Ein Ferromagnet stellt ein System dar, in dem keine Richtung ausgezeichnet ist und das Rotations-symmetrie aufweist. Die Spins der Atome sind statistisch angeordnet und zeigen in verschiedene Richtungen. Doch unterhalb der Curie-Temperatur T_C ordnen sich die Spins symmetrisch oder anti-symmetrisch an, so entsteht eine spontane Magnetisierung und es bildet sich eine Vorzugsrichtung aus (siehe Abbildung 1). In der Landau-Theorie für Phasenübergänge hat die Freie Energie des Ferromagneten folgende Form

$$F = F_0 + am^2 + bm^4$$

mit der Magnetisierung m und $a, b \in \mathbb{R}$.

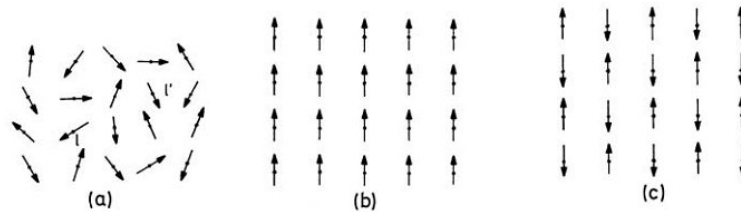


Abbildung 1: Der Ferromagnet

Das Minimum der Freien Energie ist gegeben durch $m_0 = 0$. In einen Parameterbereich, in dem a negativ und b positiv ist, erhält man die beiden Möglichkeiten $m_0 = \pm\sqrt{-a/2b}$. Mathematisch spricht man hier von einer Bifurkation (siehe Abbildung 2). Der Grundzustand befindet sich im Minimum der Freien Energie F , doch in diesem Parameterbereich gibt es zwei mögliche Grundzustände und das System muss sich für einen entscheiden. Damit ist die ursprüngliche Symmetrie spontan gebrochen. Die ursprüngliche Rotationssymmetrie des Ferromagneten wurde gebrochen zu einer Drehsymmetrie um die Magnetisierungsrichtung.

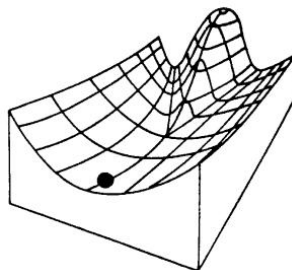


Abbildung 2: Bifurkation

2.3 Beispiel exakter Symmetrie

Betrachte folgende Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)^* - V(\phi, \phi^*) \quad (2)$$

mit dem Potential

$$V = \underbrace{m^2(\phi\phi^*)}_{\text{Massenterm}} + \underbrace{\lambda^2(\phi\phi^*)^2}_{\text{Selbstww.}} \quad \text{mit } m, \lambda \in \mathbb{R} \quad (3)$$

Offensichtlich sind V und \mathcal{L} invariant unter einer globaler Symmetrietransformation $\exp(i\alpha)$.

Durch Ableiten nach den Feldern ϕ ergibt sich das Minimum des Potentials ($V' = 0$) und damit den Grundzustand des Systems, den Vakuumzustand $\phi_0 = 0$. Dieser ist ebenfalls invariant unter der oben angegebenen Symmetrietransformation. Die Symmetrie ist also exakt (siehe Abbildung 3a).

2.4 Das Goldstone-Modell

Betrachte nun ein scheinbar nutzloses Potential, bei dem der Massenterm das falsche Vorzeichen hat.

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)^* - V(\phi, \phi^*) \quad (4)$$

$$V = -\mu^2(\phi\phi^*) + \lambda^2(\phi\phi^*)^2 \quad (5)$$

Es scheint, als gäbe es Teilchen mit einem negativen Massenquadrat, eine Eigenschaft von Tachyonen. Da Tachyonen allerdings instabil unter Zeitentwicklung sind, sollten sie in der Theorie nicht auftauchen. Genauere Untersuchung der Lagrange-Dichte zeigen, dass der Tachyonenterm durchaus vermeidbar ist.

Dazu wird wieder zuerst das Minimum des Potentials und damit der Vakuumzustand berechnet. Man erhält:

$$\text{grad } V = \left(\frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \phi^*} \right) V = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \phi} [-\mu^2(\phi\phi^*) + \lambda^2(\phi\phi^*)^2] \\ \frac{\partial}{\partial \phi^*} [-\mu^2(\phi\phi^*) + \lambda^2(\phi\phi^*)^2] \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$= \begin{pmatrix} -\mu^2\phi^* + 2\lambda^2\phi\phi^{*2} \\ -\mu^2\phi + 2\lambda^2\phi^2\phi^* \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0 \quad (7)$$

Eine mögliche Lösung ist ein verschwindender Vakuumerwartungswert $\phi_0 = 0$. Dies erweist sich hier aber als ein Maximum und entspricht nicht dem richtigen Vakuum. Durch Ausklammern von ϕ bzw. ϕ^* findet man:

$$\Rightarrow -\mu^2 + 2\lambda^2(\phi\phi^*) = 0 \quad (8)$$

$$\Rightarrow \phi\phi^* = |\phi|^2 = \left(\frac{\mu}{\sqrt{2}\lambda} \right)^2 \quad (9)$$

Wir erhalten also einen Ring aus unendlich vielen entarteten Vakua ϕ_0 in der komplexen Ebene (siehe Abbildung 3b)¹ mit:

$$|\phi_0| = \frac{\mu}{\sqrt{2}\lambda} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} \quad (10)$$

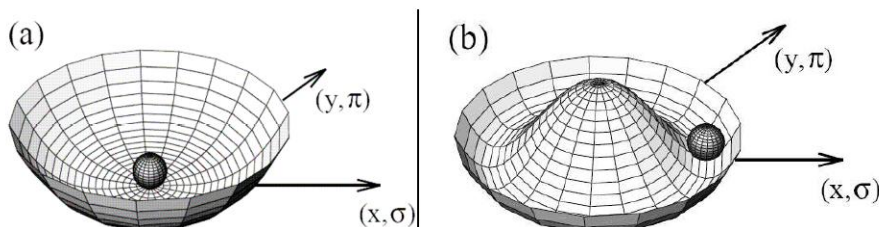


Abbildung 3: Potential: (a) exakte, (b) spontan gebrochene Symmetrie

¹K. Leonhardt: <http://iktp.tu-dresden.de/IKTP/Seminare/HS2006/leonhardt.pdf>

Ähnlich wie beim Ferromagneten liegt hier spontane Symmetriebrechung vor. Wählt man ein festes Vakuum, so entspricht die Transformation $e^{i\alpha}$ einer Drehung in der komplexen Ebene, die den gewählten Vakuumszustand in einen anderen überführt.

Um nun den Tachyonterm zu umgehen, wird das Feld, als eine Variation um einen Vakuumszustand $\phi_0 = v/\sqrt{2}$ neu parametrisiert. Real- und Imaginärteil des Feldes werden wie folgt durch die reellen Felder χ und η ersetzt.

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \chi(x) + i\eta(x)) \quad (11)$$

Das Feld in seiner neuen Parametrisierung eingesetzt in die Lagrange-Dichte und zusammengefasst liefert:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi)^* + \mu^2(\phi\phi^*) - \lambda^2(\phi\phi^*)^2 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)(\partial^\mu \chi)^* + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta)^* + \underbrace{\frac{\mu^4}{4\lambda^2}}_{=const} \underbrace{-\mu^2 \chi^2}_{Masse} \\ &\quad \underbrace{-\mu\lambda\chi\eta^2 - \frac{\lambda^2}{2}\chi^2\eta^2}_{Ww-Terme} \quad \underbrace{-\mu\lambda\chi^3 - \frac{\lambda^2}{4}\chi^4 - \frac{\lambda^2}{4}\eta^4}_{Selbst-Ww.} \end{aligned} \quad (13)$$

In dieser Form sieht man einen Massenterm mit dem erwarteten, physikalisch sinnvollen Vorzeichen. Anstelle des ursprünglichen Feldes treten zwei Felder η und χ auf. Beide Felder haben einen kinetischen Term und einige Wechselwirkungs- und Selbstwechselwirkungsterme. Der konstante Term in Gleichung (12) hat keinerlei physikalische Bedeutung und kann weggelassen werden. Das Feld χ hat die Masse μ und entspricht dem ursprünglichen Feld. Das Feld η ist masselos, taucht hier neu auf und wird Goldstone-Boson genannt.

2.5 Das Goldstone-Theorem

Das Goldstone-Theorem besagt folgendes:

Die betrachtete Theorie sei invariant unter Poincaré-Transformation und es existiere ein Noether-Strom j_μ mit $\partial^\mu j_\mu = 0$ und $\int d^3x j_0 = Q$. Sei weiter die, mit der Erhaltungsgröße Q verbundene Symmetrie kontinuierlich, global und spontan gebrochen, so taucht in der Theorie ein masseloses pseudoskalar Teilchen auf, welches Goldstone-Boson genannt wird und an den Strom j_μ koppelt.²

Einen mathematischen Beweis für das Goldstone-Theorem findet sich in den meisten Büchern über Quantenfeldtheorie. Im Seminar wurde ein Beweis aus „M.E. Peskin, D.V. Schroeder; An Introduction to Quantum Field Theory“ gezeigt.

Bemerkungen:

- Betrachtet man mehrere Felder, die invariant bezüglich einer Symmetriegruppe G sind, welche durch die Generatoren T^i erzeugt wird, dann existiert für jeden spontan gebrochenen Generator T^a ein Goldstone-Boson.
- Niederenergiethese: Das Verhalten von Goldstone-Bosonen bei niedrigen Energien ist durch die gebrochene Symmetrie festgelegt. Somit lassen sich Teilchen auf ihre Identität als Goldstone-Bosonen testen.

²J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg: Broken Symmetries
In: Physical Review. 127/3/1962, S. 965-970

Beispiele bzw. Kandidaten für Goldstone-Bosonen:

- das Pion (Brechung der Isospinsymmetrie, chirale $SU(2)_L \times SU(2)_R$ Symmetrie)
- das Neutralino (Brechung der Supersymmetrie)
- das Axion (Brechung der Peccei-Quinn-Symmetrie)

3 Der Higgs-Mechanismus

3.1 Einleitung

Der Higgs-Mechanismus wurde 1964 von dem britischen Physiker Peter Higgs zur Beschreibung des Meißner-Ochsenfeld-Effekts (Verdrängung von Magnetfeldlinien aus einem Supraleiter) entwickelt. Der Higgs-Mechanismus erzeugt im Supraleiter eine effektive Photonmasse, die zu einer endlichen Eindringtiefe führt.

In der Quantenmechanik verletzen Massenterme der Eichbosonen die Eichinvarianz. Allerdings sind massive Eichbosonen experimentell eindeutig nachgewiesen worden. Mit Hilfe des Higgs-Mechanismus kann dieses Problem gelöst werden.

3.2 Der Higgs-Mechanismus

Das Goldstone-Modell betrachtet Theorien, die einer globalen Symmetrie unterliegen. Sei nun die folgende Lagrange-Dichte gegeben:

$$\mathcal{L} = \underbrace{(D_\mu \phi)(D^\mu \phi)^*}_{=\mathcal{L}_1} + \underbrace{\mu^2(\phi\phi^*)}_{=\mathcal{L}_2} - \underbrace{\lambda^2(\phi\phi^*)^2}_{=\mathcal{L}_3} - \underbrace{\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{=\mathcal{L}_4} \quad (14)$$

mit

$$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu \quad \text{und} \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

\mathcal{L} ist invariant unter lokalen Eichtransformationen $e^{i\alpha(x)}$.

Weiter ist \mathcal{L}_2 so gegeben, dass spontane Symmetriebrechung vorliegt.

Das Verhalten von \mathcal{L}_2 und \mathcal{L}_3 sind aus dem Goldstone-Modell bekannt. Für die Betrachtung der anderen Terme der Lagrange-Dichte wählen wir eine neue Parametrisierung des Feldes ϕ in Polarkoordinaten,

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \chi(x))e^{i\eta(x)/v} \quad (15)$$

mit dem Higgs-Feld χ und dem Goldstone-Boson η .

Betrachte \mathcal{L}_1 :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= (D_\mu \phi)(D^\mu \phi)^* \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left((\partial_\mu - iqA_\mu)(v + \chi)e^{i\eta/v} \right) \cdot cc \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\partial_\mu \chi + \frac{i}{v}(v + \chi)\partial_\mu \eta - iqA_\mu(v + \chi) \right) e^{i\eta/v} \cdot cc \end{aligned} \quad (16)$$

Multipliziert man die e -Funktion mit ihrem komplex Konjugierten und führt dann eine Eichtransformation $B_\mu = (A_\mu - \frac{1}{qv} \partial_\mu \eta)$ durch, so findet man:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\partial_\mu \chi - iq \left(A_\mu - \frac{1}{qv} \partial_\mu \eta \right) (v + \chi) \right) \cdot cc \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_\mu \chi - iq B_\mu (v + \chi)) \cdot cc \end{aligned} \quad (17)$$

In der neuen Eichung ist das Goldstone-Feld η verschwunden und durch Ausmultiplizieren erhalten wir, mit $D_\mu = \partial_\mu - iq B_\mu$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_\mu \chi - iq B_\mu \chi - iq B_\mu v) \cdot cc \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (D_\mu \chi - iq B_\mu v) \cdot cc \\ &= \frac{1}{2} (D_\mu \chi) (D^\mu \chi)^* + \underbrace{\frac{q^2 v^2}{2} B_\mu B^\mu}_{\text{Massenterm}} \end{aligned} \quad (18)$$

Durch Multiplikation mit dem komplex Konjugierten erhält man einen Massenterm für das neue Eichfeld B_μ .

Betrachtet man nun \mathcal{L}_4 in der neuen Eichung, so kommt man zu folgendem Ergebnis:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_4 &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu) (\partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu) \\ &= -\frac{1}{4} \left(\partial_\mu A_\nu - \frac{1}{qv} \partial_\nu \eta - \partial_\nu \left(A_\mu - \frac{1}{qv} \partial_\mu \eta \right) \right) \\ &\quad \cdot \left(\partial^\mu \left(A^\nu - \frac{1}{qv} \partial^\nu \eta \right) - \partial^\nu \left(A^\mu - \frac{1}{qv} \partial^\mu \eta \right) \right) \\ &= -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \\ &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (19)$$

Der Term ändert sich nicht, da lediglich eine Eichtransformation durchgeführt wurde, unter der die einzelnen Terme der Lagrange-Dichte gerade invariant sind.

Insgesamt ergibt sich die Lagrange-Dichte zu:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (D_\mu \chi) (D^\mu \chi)^* + \frac{q^2 v^2}{2} B_\mu B^\mu - \mu^2 (\chi \chi^*) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \mathcal{L}_{WW} \quad (20)$$

Dabei hat das Eichfeld B_μ die Masse $M = qv$ und das Higgs-Feld χ die Masse μ erhalten. Das Goldstone-Boson η wurde „weggeeeicht“.

Der oben vorgestellte Higgs-Mechanismus liefert, angewandt auf die elektroschwache Theorie (also eine nicht ablesche Eichtheorie), die Massen der W- und Z-Bosonen. Da die Ladungssymmetrie exakt ist, koppelt das Higgs-Boson nicht an das Photon und somit bleibt dieses masselos. Aus der Theorie folgt ein massives Higgs-Boson, welches allerdings noch nicht experimentell nachgewiesen werden konnte.

3.3 Das Higgs-Boson

Folgende Eigenschaften werden dem Higgs-Boson zugeschrieben:

Masse	$> 114,4 \text{ GeV}$
Masse _{SUSY}	$> 92,8 \text{ GeV}^3$
Spin	0
Ladung	Schwacher Isospin

Es gibt noch verschiedene andere Modelle mit unterschiedlich vielen Higgs-Teilchen in verschiedenen Massebereichen. Weitere Erkenntnisse wird der am 10. September 2008 in Betrieb gehende LHC bringen, bei dem die Suche nach dem Higgs-Boson eines der Hauptziele ist.

4 Zusammenfassung

4.1 Goldstone-Theorem

- Spontan gebrochene globale Symmetrie erzeugt masseloses Goldstone-Boson
- Beseitigt Tachyon-Term \rightarrow reelle Masse

4.2 Higgs-Mechanismus

- Spontan gebrochene lokale Symmetrie erzeugt masseloses Goldstone-Boson
- Beseitigt Tachyon-Term \rightarrow reelle Masse
- Durch neue Eichung verschwindet Goldstone-Boson
 \Rightarrow Eichfeld erhält Masse (Freiheitsgrade bleiben erhalten)

5 Literatur

- T.Kugo; Eichtheorie
- M.E. Peskin, D.V. Schroeder; An Introduction to Quantum Field Theory
- P. Schmüser; Feynman-Graphen und Eichtheorie für Experimentalphysiker
- E. Rebhan; Theoretische Physik 2
- F. Schwabl; Statistische Mechanik
- K. Sibold; Theorie der Elementarteilchen
- S. Weinberg; The Quantum Theory of Fields
- M.Kaku; Quantum Field Theory
- L.C. Predazzi; An introduction to gauge theory and modern particle physics
- M. Chaichian, N.F. Nekipa; Introduction to Gauge Field Theories
- I.J.R. Aitchison; An Informal Introduction to Gauge Field Theories