Seminar: Theorie der Teilchen und Felder SS 2007

- Symmetrien in der Quantenmechanik -

Marc Fliedner

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Eine Invarianz unter einer bestimmten Symmetrie-Transformation kann zu einer Erhaltungsgröße führen. Dies ist schon aus der klassischen Physik bekannt (vgl. Noether-Theorem). Für die Quantenmechanik bleibt nun zu untersuchen, wie sich die transformierenden Operatoren einer Symmetrie verhalten und wie sich diese bestimmen lassen.

2 Theoretische Grundlagen

2.1 Symmetrie-Transformation

Zunächst muss genau definiert werden, was eine Symmetrie-Transformation genau ist. Sei S ein physikalisches System und $\mathcal{H}$ der Hilbertraum seiner reinen Zustände. Dann wird jede Transformation G, die eine ein-eindeutige Beziehung zwischen den verschiedenen Einheitsstrahlen $|\xi\rangle_R$ von $\mathcal{H}$ darstellt, Strahlen bezüglich der physikalisch realisierbaren Zustände unter ihnen selbst transformiert und Übergangswahrscheinlichkeiten erhält, Symmetrie-Transformation genannt. Dies lässt sich auch über das Skalarprodukt ausdrücken

$$ {}_R\langle\psi|\phi\rangle_R = {}_R\langle\psi_G|\phi_G\rangle_R, \quad |\xi\rangle_R \stackrel{G}{\Longrightarrow} |\xi_G\rangle_R \equiv G|\xi\rangle_R \tag{1}$$

Existiert nun ein Superselektions-Operator, also ein Operator, der mit allen irreduziblen Observablen des Systems vertauscht, so „zerfällt “der Hilbertraum in eine Summe aus kohärenten Hilberträumen

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{coh,1} \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_{coh,N} \tag{2}$$

Denn seien $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ zwei verschiedene Zustände, deren Superposition $|\psi\rangle = \alpha_1|\psi_1\rangle + \alpha_2|\psi_2\rangle$ $\big(\text{mit} \quad |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1\big)$ nicht unbedingt einen reinen Zustand darstellen muss und die sich in den Quantenzahlen $\{q_i\}$ des Superselektionsoperators Q unterscheiden mögen, so gilt

$$\langle\psi_2|A|\psi_1\rangle = 0 \quad \forall A \tag{3}$$

Es existiert also kein Operator A, der die Orthogonalität von $|\psi\rangle_1$ zu $|\psi\rangle_2$ aufheben kann. Es gibt keine Möglichkeit den einen Zustand in den anderen zu überführen. Es gilt nach (3)

$$\langle\psi|A|\psi\rangle = |\alpha_1|^1\langle\psi_1|A|\psi_1\rangle + |\alpha_2|^1\langle\psi_2|A|\psi_2\rangle$$

Der Hilbertraum zerfällt somit in kohärente Hilberträume

$$\mathcal{H} = \oplus_{\{q_i\}}\mathcal{H}\left(\{q_i\}\right) \tag{4}$$

Ist G nun eine Symmetrie-Transformation mit $\mathcal{H}_c \longrightarrow G\mathcal{H}_c$, so ist $G\mathcal{H}_c$ ebenfalls kohärent. Denn seien $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ Zustände desselben koh. Hilbertraumes $\mathcal{H}_c$. Seien nun $G|\psi_1\rangle$ und $G|\psi_2\rangle$ Zustände zweier verschiedener koh. Hilberträume. Es ist klar, dass $|\psi\rangle = \alpha_1|\psi_1\rangle + \alpha_2|\psi_2\rangle$ $\big(\text{mit} \quad |\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 = 1\big)$ ein physikalisch realisierbarer Zustand sein muss, der nichtverschwindende Projektionen bezüglich $|\psi_1\rangle$ und $|\psi_2\rangle$ besitzt. Nun ist der Zustand $G|\psi\rangle$ unter obigen Annahmen offensichtlich nicht mehr physikalisch realisierbar, besitzt er doch nicht-verschwindende Projektionen bezüglich $G|\psi_1\rangle$ und $G|\psi_2\rangle$. $G\mathcal{H}_c$ muss somit kohärent sein.
Es ist ebenso klar, dass das Bild von $\mathcal{H}_c$ einen vollen kohärenten Raum füllen muss, sei nun $|\phi'\rangle$ ein Zustand, der kohärent mit $G|\phi\rangle$ ist. Jeder Zustand eines kohärenten Raumes sollte das Bild irgendeines Zustands sein. Daher existiert $G^{-1}|\phi'\rangle$, welcher kohärent mit $|\phi\rangle$ sein muss. Da $|\phi'\rangle$ ein beliebiges Element des kohärenten Raumes ist, muss $G\mathcal{H}_c$ einen vollen kohärenten Raum füllen. Zudem ist klar, dass $dim\left(\mathcal{H}_c\right) = dim\left(G\mathcal{H}_c\right)$ gilt.
Sei $|\xi\rangle_R \longrightarrow |\xi_G\rangle_R$ mit U_G linear oder anti-linear, dann ist U_G nicht notwendig eindeutig. Wenn U_G unitär oder antiunitär ist und Zustandsvektoren untereinander transformiert, so erfüllt $|\phi\rangle_R \longrightarrow \left(U|\phi\rangle\right)_R$ eine Symmetrie-Transformation.

2.2 Wigner-Theorem

Schon die letzte Aussage des vorigen Abschnitts deutet auf das Wigner-Theorem hin. Es besagt:

Wigner-Theorem:

Jede Symmetrie-Transformation G zwischen kohärenten Räumen ist durchführbar durch eine ein-eindeutige lineare oder anti-lineare Isometrie U_G.

Seien die Einheitsstrahlen $|\xi\rangle_R$ und $|\xi_G\rangle_R$ gegeben, dann lassen sich stets Repräsentanten $|\xi\rangle \in |\xi\rangle_R$ und $|\xi_G\rangle \in |\xi_G\rangle_R$ wählbar, derart dass $|\xi_G\rangle = U_G|\xi\rangle$. Das Wigner-Theorem lässt sich analog zu (1) mit dem Skalarprodukt darstellen

$$\begin{aligned} \langle\psi_G|\phi_G\rangle &= \langle\psi|\phi\rangle \quad \text{wenn}\, U_G\, \text{unitär} \\ \langle\psi_G|\phi_G\rangle &= \langle\psi|\phi\rangle^* \quad \text{wenn}\, U_G\, \text{anti-unitär} \end{aligned} \tag{5}$$

Für den Beweis wird verwiesen auf [1, 3].

2.3 Transformationseigenschaften von Operatoren

Für die Transformierte eines Operators A unter einer Symmetrie-Transformation G gilt

$$|\langle\phi_G|A_G|\psi_G\rangle| = |\langle\phi|A|\psi\rangle| \tag{6}$$

Die einzige Lösung ist (bis auf Phasenunterschiede)

$$A_G = U_G\, A\, U_G^\dagger \tag{7}$$

somit gilt

$$\begin{aligned} \langle\phi_G|A_G|\psi_G\rangle &= \langle\phi|A|\psi\rangle \quad \text{wenn}\, U_G\, \text{unitär} \\ \langle\phi_G|A_G|\psi_G\rangle &= \langle\phi|A|\psi\rangle^* \quad \text{wenn}\, U_G\, \text{anti-unitär} \end{aligned} \tag{8}$$

Seien nun $\{A_i\}$ ein irreduzibler Satz von Observablen, so kann jede Symmetrie G durch die Transformationsvorschrift jedes einzelnen $\{A_i\}$´s bestimmt werden. Man erhält somit G aus den $\{A_i\}$´s und den $\{A_{iG}\}$´s. Im Allgemeinen sind Symmetrien durch ihre Wirkung auf Basis-Observablen defniert und nicht durch ihre Wirkung auf Zustände. Somit ist der unitäre bzw. der antiunitäre Charakter der Symmetrie nicht unbedingt sofort ersichtlich. Will man dies dennoch in Erfahrung bringen, so muss man sich klar machen, dass die Transformierten der Basis-Observablen eine Funktion aller Basis-Observablen sind

$$U_G\, A_i\, U_G^\dagger = f_i\,(A_1, A_2, \cdots) \tag{9}$$

Die Kenntnis bzgl. aller f_i bestimmt somit die U_G bis auf eine Phase. Es gilt zudem

$$[A_i, A_j] = ig_{ij}\,(A_1, A_2, \cdots) \tag{10}$$

Wendet man nun U_G auf beiden Seiten von (10) an, so erhält man

$$[f_i\,(A_1, A_2, \cdots)\,, f_j\,(A_1, A_2, \cdots)] = \pm i\hat{g_{ij}}\,(f_1\,(A_1, A_2, \cdots)\,, \cdots) \tag{11}$$

Daraus kann man nun den linearen bzw. antilinearen Charakter von U_G bestimmen, denn

$$\hat{g} = g \quad \Rightarrow U_G\, \text{linear} \tag{12}$$

$$\hat{g} = g^* \quad \Rightarrow U_G\, \text{anti-linear} \tag{13}$$

2.4 Symmetriegruppen

Die Menge aller Symmetrie-Transformationen bilden eine Gruppe. Jedoch ist oft nur kleine Untergruppe der Symmetrie-Transformationen interessant, nämlich solche, welche im Labor tatsächlich zu messbaren Erhaltungsgrößen führen. Sei nun $\mathcal{G}$ eine Symmetriegruppe, dann sind die Gruppenelemente $G_i \in \mathcal{G}$ anwendbar durch unitäre oder antiunitäre Operatoren. Jedoch sind die Operatoren U_{G_i} nur bis auf eine Phase eindeutig, so dass die Gruppeneigenschaft nicht automatisch gegeben ist, nur

$$U_{G_iG_j} = \omega\,(G_i, G_j)\, U_{G_i}U_{G_j} \tag{14}$$

mit $|\omega(G_i, G_j)| \equiv 1$. Ein interessanter Fall ist die Untergruppe der Symmetriegruppe, welche eine verbundene Lie-Gruppe ist, also von n Parametern $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ abhängt. Jede endliche Transformation kann somit aus einer infinitesimalen Transformation generiert werden und der Operator dieser endlichen Transformation ist unitär. Sei nun G (α_i) ein Gruppenelement in der Nähe der Identität, so kann aus den entsprechenden U_G´s folgender gewählt werden

$$U(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = \exp\left[-i\sum_{j=1}^{n}\alpha_j I_j\right] \tag{15}$$

wobei $I_j \left(= I_j^\dagger\right)$ die Generatoren der Gruppe sind. Sei nun eine infinitesimale Symmetrie-Transformation durch $(0, 0, \cdots, \delta\alpha_i, \cdots)$ so folgt eine Transformation der Form $A \longrightarrow A_m + \delta_i A_m$. Dann folgt folgende wichtige Kommutatorrelation

$$[A_m, I_i] = -i\frac{\delta_i A_m}{\delta\alpha_i} \tag{16}$$

Dies sieht man, wenn man (15) um $\delta\alpha \simeq 0$ in einer Taylorreihe entwickelt

$$U = 1 - i\delta\alpha_j I_j$$

bzw.

$$U^\dagger = 1 + i\delta\alpha_j I_j$$

damit folgt

$$\begin{aligned} UAU^\dagger &= (1 - i\delta\alpha_j I_j)\, A\, (1 + i\delta\alpha_j I_j) \\ &= A - i\delta\alpha_j I_j A + Ai\delta\alpha_j I_j + O\left(\delta\alpha_j^2\right) \\ &= A + [A, i\delta\alpha_j I_j] + \cdots \\ &\overset{!}{=} A + \delta A \end{aligned}$$

somit folgt

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad \delta A &= [A, i\delta\alpha_j I_j] \\ \Leftrightarrow \quad [A, I_j] &= -i\frac{\delta A}{\delta\alpha_j} \end{aligned}$$

3 Symmetrietransformationen

In diesem Abschnitt werden nun 4 wichtige Beispiele für Symmetrietransformationen diskutiert. Es sei kurz angemerkt, dass es selbstverständlich noch mehr Symmetrietransformationen gibt (z.B. Isospin, Galilei-Transformation).

3.1 Translation

Sei nun $G(\vec{a})$ die Transformation, die eine Translation des Ortsvektors des Systems um den Vektor $\vec{a}$ darstellt. Dann ergeben sich folgende Transformationsgesetze

$$U(\vec{a})\,\vec{r}_i\,U^\dagger(\vec{a}) = \vec{r}_i - \vec{a} \tag{17}$$
$$U(\vec{a})\,\vec{p}_i\,U^\dagger(\vec{a}) = \vec{p}_i \qquad \forall 1 \leq i \leq N \tag{18}$$
$$U(\vec{a})\,\vec{S}_i\,U^\dagger(\vec{a}) = \vec{S}_i \tag{19}$$

Die Drehimpulse des Systems transformieren sich gemäß

$$U(\vec{a})\vec{L}_i U^\dagger(\vec{a}) = \vec{L}_i - \vec{a} \times \vec{p}_i \tag{20}$$

$\vec{S}$ ist demnach invariant unter der Transformation, da wir den Spin im COM-Sytem betrachten. Es sei kurz angemerkt, dass es eine aktive und eine passive Interpretation von Symmetrietransformationen gibt. Man könnte aktiv das System translatieren und die Messung an dem anderen Ort durchführen, oder (passiv) zwei Experimentatoren translatieren, die das System von den verschobenen Orten aus messen. Dies kann man sich auch klar machen, wenn man einen Vektor rotieren oder translatieren möchte. Entweder ich verschiebe bzw. drehe den Vektor (aktiv), oder ich verschiebe bzw. drehe das Koordinatensystem in die entgegengesetze Richtung (passiv). Somit wird auch klar, dass diese verschiedenen Betrachtungsweisen invers zueinander sind, also

$$U_G^{passiv} = \left(U_G^{aktiv}\right)^{-1} \tag{21}$$

Hier werden nur die aktiven Transformationen betrachtet, die passiven ergeben sich entsprechend. Sei nun $\vec{D}$ der Generator der Translation, dann folgt mit (16)

$$\left[(\vec{r}_i)_j\,, D_k\right] = i\delta_{jk}, \quad \left[\vec{p}_i, \vec{D}\right] = \left[S_i, \vec{D}\right] = 0 \tag{22}$$

Somit ist

$$\vec{D} = \hbar \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \hbar^{-1}\vec{P} \tag{23}$$

damit folgt schließlich

$$U(\vec{a}) = \exp\left(-i\vec{a}\,\frac{\vec{P}}{\hbar}\right) \tag{24}$$

Die Wirkung auf eine N-Teilchen Wellenfunktion ist demnach gegeben als

$$\left(U\left(\vec{a}\right)\psi\right)_{m_1,\cdots,m_N}\left(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N;t\right) = \psi_{m_1,\cdots,m_N}\left(\vec{r}_1-\vec{a},\cdots,\vec{r}_N-\vec{a};t\right) \tag{25}$$

3.2 Rotation

Sei eine Rotation $G\left(\vec{\hat{n}},\theta\right)$ durch die Drehachse $\vec{\hat{n}}$ und den Drehwinkel $0 \leq \theta \leq \pi$ gegeben, so folgt

$$\vec{r}' = \mathcal{R}\left(\vec{\hat{n}},\theta\right)\vec{r} \tag{26}$$

$$\mathcal{R}_{ij}\left(\vec{\hat{n}},\theta\right) \equiv \delta_{ij}\cos\theta + \left(1-\cos\theta\right)n_i n_j - \varepsilon_{ijk}n_k\sin\theta \tag{27}$$

Nun erhält man folgende Transformationsgesetze

$$U\left(\vec{\hat{n}},\theta\right)\,\vec{r}_i\,U^\dagger\left(\vec{\hat{n}},\theta\right) = \mathcal{R}^{-1}\left(\vec{\hat{n}},\theta\right)\vec{r}_i \tag{28}$$

$$U\left(\vec{\hat{n}},\theta\right)\,\vec{p}_i\,U^\dagger\left(\vec{\hat{n}},\theta\right) = \mathcal{R}^{-1}\left(\vec{\hat{n}},\theta\right)\vec{p}_i \qquad \forall 1 \leq i \leq N \tag{29}$$

$$U\left(\vec{\hat{n}},\theta\right)\,\vec{S}_i\,U^\dagger\left(\vec{\hat{n}},\theta\right) = \mathcal{R}^{-1}\left(\vec{\hat{n}},\theta\right)\vec{S}_i \tag{30}$$

Sei nun $\vec{I}$ der Generator der Rotation, so folgt

$$U\left(\vec{\hat{n}},\theta\right) = \exp\left(-i\theta\vec{\hat{n}}\cdot\vec{I}\right) \tag{31}$$

Da $[A_j, I_i] = i\varepsilon_{jik}A_k$ gilt, folgt

$$\vec{I} = \hbar^{-1}\vec{J} = \hbar^{-1}\left(\vec{L}+\vec{S}\right) = \hbar^{-1}\sum_{i=1}^{N}\left(\vec{r}_i\times\vec{p}_i+\vec{S}_i\right) \tag{32}$$

Der Generator der Rotation ist somit der Gesamtdrehimpuls des Systems. Wir erhalten folgenden unitären Operator

$$U\left(\vec{\hat{n}},\theta\right) = \pm\exp\left(-i\theta\vec{\hat{n}}\cdot\frac{\vec{J}}{\hbar}\right) \tag{33}$$

3.3 Parität

Die Parität ist eine diskrete Symmetrie, daher gibt es keine infinitesimalen Transformationen. Die Parität kann als zusammengesetzte Transformation verstanden werden, nämlich als Summe einer Rotation mit anschließender Spiegelung am Ursprung des Koordinatensystems. Die Transformationsgesetze sind wie folgt gegeben

$$\begin{aligned} U_P \vec{r}_i U_P^\dagger &= -\vec{r}_i & & (34) \\ U_P \vec{p}_i U_P^\dagger &= -\vec{p} \qquad \forall 1 \leq i \leq N & & (35) \\ U_P \vec{S}_i U_P^\dagger &= \vec{S}_i & & (36) \end{aligned}$$

Da nun $\vec{r}_i$ und $\vec{p}_i$ unter der Transformation beide ihr Vorzeichen wechseln und die Kommutatorrelation trotzdem erhalten sein muss, folgt, dass U_P unitär sein muss. U_P^2 kommutiert mit jedem Operator aus dem irreduziblen Satz, somit muss dieser identisch mit der Identität sein. Da U_P unitär ist, folgt, dass $U_P^2 = \exp(i\alpha)\, I$ ist mit α reell. Es wird eine Phasenwahl durchgeführt, d. d. $U_P^2 = I$ und $U_P = U_P^\dagger$ ist. Damit folgt, dass U_P eine Observable ist mit den Eigenwerten ± 1. Die Wirkung des Paritätsoperators auf einen Zustand ist gegeben durch

$$U_P |\vec{r}, m\rangle = \eta_A | -\vec{r}, m\rangle \tag{37}$$

mit der intrinsischen Parität $\eta_A = \pm 1$. Für ein N-Teilchensystem ergibt sich analog

$$(U_P \psi)_{m_1 m_2 \cdots} (\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots) = \eta_1 \cdots \eta_N \psi_{m_1 m_2 \cdots} (-\vec{r}_1, -\vec{r}_2, \cdots) \tag{38}$$

3.4 Zeitumkehr

Eine Zeitumkehr des Systems bedeutet eine invertierte Zeitentwicklung. Klassisch ist dies gegeben durch

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(t) \longrightarrow \vec{r}_i = \vec{r}_i(-t) \tag{39}$$

Die Trajektorie unter Zeitumkehr ist jedoch nicht immer mechanisch existent, es sei denn, $\mathcal{H}$ ist invariant unter der Transformation $t \longrightarrow -t$, $\vec{r}_i \longrightarrow \vec{r}_i$, $\vec{p}_i \longrightarrow -\vec{p}_i$. Die Transformationsgesetze sind gegeben durch

$$\begin{aligned} U_T \vec{r}_i U_T^\dagger &= \vec{r}_i \\ U_T \vec{p}_i U_T^\dagger &= -\vec{p}_i \qquad \forall 1 \leq i \leq N \\ U_T \vec{S}_i U_T^\dagger &= -\vec{S}_i \end{aligned}$$

Hier folgt aus der Erhaltung der Kommutatorrelation $[\vec{r}_i, \vec{p}_i]$, dass der transformierende Operator U_T anti-unitär sein muss. Demnach ist $U_T^2 = \exp(i\alpha)\, I$ bzw. nach der entsprechenden Phasenwahl $U_T^2 = \pm I$. Nun kann man nach [1] für ein System aus n Teilchen mit halbzahligen Spin folgende Relationen aufstellen

$$U_T^2 = (-1)^n \tag{40}$$

U_T hat also die Eigenwerte ± 1, falls n gerade ist und $\pm i$ falls n ungerade ist. Man könnte jetzt meinen, dass beide Vorzeichen stets gleichzeitig erfüllbar seien, jedoch gilt

$$\begin{aligned} U_T |a\rangle &= e^{i\alpha} |a\rangle \\ U_T e^{i\frac{\alpha}{2}} |a\rangle &= e^{i\frac{\alpha}{2}} |a\rangle \end{aligned}$$

Der Einheitsstrahl $|a\rangle_R$ enthält Eigenvektoren von U_T mit irgendeiner komplexen Zahl vom Betrag 1 als Eigenwert.

4 Invarianz und Erhaltungssätze

Sei nun $\mathcal{G}$ die Gruppe der Symmetrietransformationen und $\hat{G}$ die Gruppe der zugehörigen Operatoren. Ist $H(t)$ invariant unter $U_G \epsilon \hat{G}$, so folgt $[H(t), U_G] = 0$ für alle $U_G \epsilon \hat{G}$. Ist das System konservativ, der Operator A nicht explizit zeitabhängig und gilt $[A, H] = 0$, so ist A eine Konstante der Bewegung. Ist nun H konservativ und invariant unter $\hat{G}$, dann sind alle Observablen, die aus $\hat{G}$ konstruiert werden können und nicht explizit zeitabhängig sind, Konstanten der Bewegung. Zudem ist jede Gruppe von Symmetrietransformationen, die H invariant lässt und aus unitären Operatoren besteht, verbunden mit einer bestimmten Anzahl von Erhaltungssätzen. Aus der Invarianz von $H(t)$ unter $\hat{G}$ folgt

$$[U(t,t_0), U_G] = 0 \quad \forall U_G \epsilon \hat{G} \tag{41}$$

Der Zeitentwicklungsoperator ist bekanntlich gegeben durch

$$U(t,t_0) = I - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' H(t')\, U(t',t_0) \tag{42}$$

Wendet man nun U_G von links und $U_G^\dagger$ von rechts auf (42) an und nutzt zusätzlich $[U_G, H(t')] = 0$ mit $t_0 \leq t' \leq t$ aus, so erhält man

$$U_G U(t,t_0)\, U_G^\dagger = I - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} dt' H(t')\, U_G U(t',t_0)\, U_G^\dagger \tag{43}$$

Man erkennt, dass $U(t,t_0)$ und $U_G U(t,t_0)\, U_G^\dagger$ die gleiche Integralgleichung erfüllen und somit eindeutig identisch sein müssen. Das bedeutet nun, dass zwei Zustände, welche auseinander durch $U_G \epsilon \hat{G}$ hervorgehen, behalten diese Zuordnung in der Zeit. Es gilt

$$|\langle\psi|U(t,t_0)\,|\phi\rangle|^2 = |\langle\psi|U_G^\dagger U(t,t_0)\, U_G|\phi\rangle|^2 \tag{44}$$

4.1 Translationsinvarianz

Translationsinvarianz bedeutet Invarianz der dynamischen Gesetze in Raum und Zeit. Der Generator der Translation ist der Gesamtimpuls des Systems und für ein isoliertes System im homogenen raum gilt $\left[H, \vec{P}\right] = 0$ bzw. die Erhaltung des Gesamtimpulses. Nun entspricht eine Überprüfung dieses Erhaltungssatzes einem Test des Raumes bzgl. Homogenität. Die Homogenität der Zeit liefert den Energie-Erhaltungssatz. Aufgrund dieser Erhaltungssätze ist z. B. die Reaktion $e^- + e^+ \longrightarrow \gamma$ verboten.

4.2 Rotationsinvarianz

Bei Rotationsinvarianz hängen die dynamischen Gesetze nicht von der Orientierung im Raum ab. Da der Gesamtdrehimpuls $\vec{J}$ der Generator der Rotation ist, folgt bei Isotropie des Raumes eine Drehimpulserhaltung, also $\left[H, \vec{J}\right] = 0$. Diese Drehimpulserhaltung verbietet z. B. den Zerfall des positiven Kaons $K^+ \longrightarrow \pi^+ + \gamma$ in ein positives Pion und ein Photon, da das K^+ und das π^+ einen Spin von 0 und das Photon einen Spin von 1 besitzen. Die Messung der Reaktionsrate dieser Reaktion im Verhältnis zu allen vorkommenden Reaktionen ergibt $\frac{\Gamma(K^+ \longrightarrow \pi^+\gamma)}{\Gamma(K^+ \longrightarrow \text{all})} < 1,4 \cdot 10^{-6}$ und bestätigen mit kleinem Fehler die Gesamtdrehimpulserhaltung. Ebenso ist jeder elektromagnetischer Übergang $X^* \longrightarrow X + \gamma$, wobei X und X^* zwei Zustände des gleichen Kerns mit Spin 0 darstellen, verboten.

4.3 Invarianz unter Parität

Invarianz unter Parität bedeutet, dass wenn ein Zustand zur Zeit t_0 unter Parität durch

$$|\psi(t_0)\rangle \xrightarrow{P} U_P|\psi(t_0)\rangle \tag{45}$$

gegeben ist, so gilt für einen Zustand zur beliebigen Zeit t

$$|\psi(t)\rangle \xrightarrow{P} U(t,t_0)\, U_P|\psi(t_0)\rangle\ \forall t \tag{46}$$

Nun wird eine Invarianz unter Parität für ein nukleares System angenommen. Dies führt zu $[H, U_P] = 0$. Aus der Struktur von $H_{nukl.Sys.}$ kann man erkennen, dass keine Energieentartung bezüglich der Parität vorliegt (falls eine Paritätserhaltung vorliegt). Nun kann eventuelle Paritätsverletzungen durch die Suche nach Zuständen mit undefinierbarer Parität entdecken.
Betrachtet man den Zustand eines nuklearen Systems in Kugelkoordianten, so ist die Wirkung des Paritätsoperators bekanntermaßen gegeben durch

$$\begin{aligned} U_P R(r) Y_J^M(\theta,\psi) &\longrightarrow R(r) Y_J^M(\pi-\theta,\phi+\pi) \\ &= (-1)^J R(r) Y_J^M(\theta,\phi) \end{aligned} \tag{47}$$

Die Anfangsparität ist $\Pi_i = \Pi$ und die Endparität $\Pi_f = (-1)^J$. Da nun $\Pi_i = \Pi_f$ sein muss, muss die Anfangsparität bei Paritätsinvarianz

$$\Pi = (-1)^J \quad \text{bzw.} \quad J^\Pi = 0^+, 1^-, 2^+, \cdots \tag{48}$$

sein. Daher ist der $\alpha-$ Zerfall

$$^{16}O\left(2^-; 8,88\right) \longrightarrow ^{12}C\left(0^+; g.s.\right) + \alpha\left(0^+\right) + 7,148MeV$$

verboten. Nach Messungen ergibt sich $\Gamma_\alpha = (1,8 \pm 0,8)\cdot 10^{-10}eV$. Schätzungen zufolge ist $\Gamma_\alpha^+ \simeq 6\cdot 10^4 eV$, falls der Anfangszustand positive Parität besitzt.
Die Physiker Lee & Yang haben herausgefunden, dass die Parität der schwachen Wechselwirkung maximal verletzt wird. Wu et al. haben dazu den folgenden $\beta-$ Zerfall untersucht

$$^{60}Co\left(5^+; g.s.\right) \longrightarrow ^{60}Ni\left(4^+; 2,505\right) + e^- + \bar{\nu}_e$$

und festgestellt, dass die Parität hierbei nicht erhalten ist. Lee & Yang haben die folgende Formel für die Winkelverteilung der emittierten Elektronen aufgestellt

$$W(\theta) = 1 - \frac{\langle J_{i3}\rangle}{J_i} \cdot \frac{v}{c} \cdot \cos\theta \tag{49}$$

Hier ist J_i der Spin des Ursprungskerns, $\langle J_{i3}\rangle$ der Betrag der Poralisation des Ursprungskerns und v die Geschwindigkeit des emittierten Elektrons. Weitere Messungen bestätigen dies und es wurde festgestellt, dass die Parität in der schwachen WW maximal verletzt wird.
Für die Übergangswahrscheinlichkeit unter Erhaltung der Parität muss gelten

$$W\left(\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_N; \vec{s}_1, \cdots, \vec{s}_N\right) = W\left(-\vec{p}_1, \cdots, -\vec{p}_N; \vec{s}_1, \cdots, \vec{s}_N\right)$$

Daher müssen alle Mittelwerte von Pseuskalaren verschwinden. In der starken und elektromagnetischen WW ist die Parität erhalten. Der Austausch von Gluonen und Photonen ändert den Quarktyp nicht und somit kann die intrinsische Parität der Quarks willkürlich festgelegt werden (üblicherweise $+1$). Antiquarks haben demnach eine intrinsische Parität von -1. Die Paritäten aller Hadronen sind durch ihre Bestandteile festgelegt ($\eta_p = \eta_n = 1,\ \eta_\pi = \eta_K = -1$). Dies ist experimentell bestätigt.

4.4 Invarianz unter Zeitumkehr

U_T ist anti-unitär, so dass die Invarianz nicht zu einer neuen erhaltenen Quantenzahl führt. Da

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle \quad \text{und} \quad U_T H(t) U_T^{-1} = H(-t)$$

folgt

$$-i\hbar\frac{d}{dt}U_T|\psi(t)\rangle = H(-t)U_T|\psi(t)\rangle$$

und weiter

$$i\hbar\frac{d}{dt}U_T|\psi(-t)\rangle = H(t)U_T|\psi(-t)\rangle$$

Somit ist $|\psi(t)\rangle$ eine mögliche Trajektorie des Systems und $\overline{|\psi(t)\rangle} \equiv U_T|\psi(-t)\rangle$ eine weitere mögliche Trajektorie. Wenn nun das System invariant unter Zeitumkehr und konservativ ist, gilt

$$U^\dagger\left(t,t_0\right) = U_T U\left(t,t_0\right) U_T^\dagger \tag{50}$$

Dies lässt sich auch über das Prinzip der Mikroumkehrbarkeit ausdrücken

$$U^\dagger\left(t,t_0\right) = U_T U\left(t,t_0\right) U_T^\dagger \tag{51}$$

Es folgt also

$$H = U_T H U_T^\dagger \quad \text{,i.e.} \quad [H, U_T] = 0$$

Da $[H, U_T] = 0$ folgt, dass wenn

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

gilt ebenso

$$H\left(U_T|\psi\rangle\right) = E\left(U_T|\psi\rangle\right)$$

Der Unterraum $\mathcal{H}_E$ von Eigenvektoren von H mit dem Eigenwert E ist stabil unter Zeitumkehr. Es lässt sich nun zeigen (vgl. [1]), dass bei einer geraden Fermionenanzahl n die Vektoren in einer Basis so gewählt werden können, dass $U_T|\phi\rangle = |\phi\rangle$. Ist n ungerade und $|\phi\rangle$ die Komponente einer Basis von $\mathcal{H}_\mathcal{E}$, dann ist $U_T|\phi\rangle$ eine weitere Komponente der Basis. Die Dimension von $\mathcal{H}_E$ ist somit gerade. Dies führt zu dem Theorem von Kramer (vgl. [1]): Sei $[H, U_T] = 0$ und das System habe eine ungerade Zahl von Fermionen, dann ist jeder Eigenwert von H mindestens zweifach entartet, und die Entartung ist immer gerade.
Für eine Reaktion (z.B. Kollision)

$$A_1 + \cdots \longrightarrow A_1' + \cdots$$

und die Umkehrreaktion

$$A_1' + \cdots \longrightarrow A_1 + \cdots$$

gilt bei Invarianz unter Zeitumkehr

$$W\left(\vec{p}_1, \vec{s}_1, \cdots \longrightarrow \vec{p}_1', \vec{s}_1', \cdots\right) = W\left(-\vec{p}_1', -\vec{s}_1', \cdots \longrightarrow -\vec{p}_1, -\vec{s}_1, \cdots\right)$$

Die Invarianz lässt sich somit durch die Wirkungsquerschnitte der Hin- und Rückreaktion untersuchen. Alle Prozesse (der starken, schwachen und elektromagn. WW) zeigen (mit kleinem Fehler) Invarianz unter Zeitumkehr. Jedoch gibt es auch Gründe für eine Verletzung der Invarianz, da das neutrale Kaon die CP-Transformation verletzt, jedoch dem CPT-Theorem gehorcht. Demnach kann nur eine Varianz durch T diese CPT-Invarianz herstellen.

5 Quellen

Literatur

[1] A. Galindo, P. Pascual. *Quantum Mechanics I.* Springer, Berlin, 1990

[2] W. Greiner, B. Müller. *Quantenmechanik, Teil 2: Symmetrien.* Harri Deutsch, Frankfurt, 1990

[3] V. Bargmann. *Note on Wigner´s Theorem on Symmetry operations.* Journal Of Mathematical Physics, Vol.5,No.7, 1964