Einführung in den Symmetriebegriff und gruppentheoretische Grundlagen

Anton Daitche

5. Juni 2007

Inhaltsverzeichnis

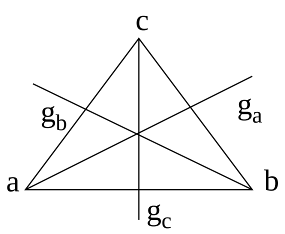
1 Einleitung

Symmetrien spielen ein große Rolle in der Physik, weil sie z.B die Lösung von Problemen erleichtern oder Erhaltungssätze liefern (Noethertheorem).

Oft denkt man bei dem Begriff Symmetrie an symmetrische geometrische Körper, z.B. ist ein Kreis bzgl. aller Drehungen und Spiegelungen (an Geraden durch den Ursprung) invariant. In der Physik verallgemeinert man diesen Begriff wie folgt:

Als Symmetrie eines Objektes bzw. Systems bezeichnet man die Invarianz dieses Objektes bzw. Systems gegenüber bestimmten Transformationen.

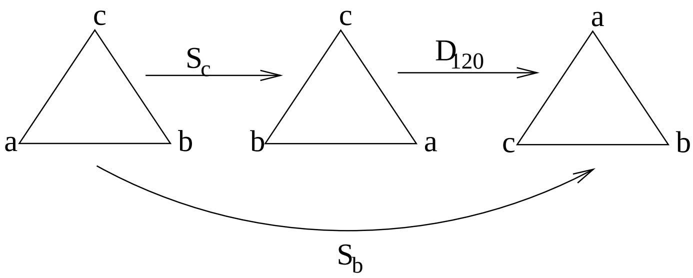
1. Beispiel: gleichseitiges Dreieck



Die Symmetrieoperationen eines gleichseitigen Dreiecks sind $\{S_a, S_b, S_c, D_{120}, D_{240}, D_{360} = D_0\}$. Wobei S_i Spiegelungen an den Geraden g_i und D_α Drehungen um den Winkel α bezeichnen. In diesem Fall ist mit Invarianz die Deckungsgleichheit gemeint.

Führt man zwei Symmetrietransformationen hintereinander aus entspricht das einer Symmetrietransformation. z.B:

$$D_{120} S_c = S_b$$



Die inverse Transformation zu einer Symmetrietransformation ist wieder eine Symmetrietransformation:

$$(D_{120})^{-1} = D_{-120} = D_{240}$$

2. Beispiel: Ortstranslationen

Betrachte die Verschiebung eines Systems von mit einander wechselwirkenden Teilchen um einen Vektor $\vec{a}$. Das System wird durch folgende Lagrangefunktion beschrieben:

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + V\left(|\vec{r}_j - \vec{r}_k|\right)$$

Diese ist invariant gegenüber Ortstranslationen (hier entspricht Invarianz der Gleichheit der Lagrangefunktion):

$$T_{\vec{a}}: \ \vec{r} \rightarrow \vec{r'} = \vec{r} + \vec{a}$$

$$L \xrightarrow{T_{\vec{a}}} L' = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\frac{d}{dt}\left[\vec{r} + \vec{a}\right]\right)^2 + V\left(|\vec{r}_j - \vec{r}_k|\right) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + V\left(|\vec{r}_j - \vec{r}_k|\right) = L$$

D.h. Ortstranslationen sind Symmetrietransformationen dieses Systems oder anders gesagt: das System ist translationssymmetrisch.

Führt man zwei Ortstranslationen hintereinander aus, so entspricht das einer Ortstraslation. Das Inverse zu einer Ortstranslation ist wieder einer Ortstranslationen.

$$T_{\vec{a}} T_{\vec{b}} = T_{\vec{a}+\vec{b}}$$

$$(T_{\vec{a}})^{-1} = T_{-\vec{a}}$$

In den beiden Beispielen gab es eine Verknüpfung (das Hintereinanderausführen) zwischen Symmetrietransformationen die zwei Symmetrietrafos in eine Symmetrietrafo überführt. Außerdem gab es stets eine inverse Symmetrietrafo.

D.h. Bestimmte Mengen von Symmetrietransformationen weisen eine Gruppenstruktur auf.

2 Gruppen

Definition. *Eine* Gruppe *ist eine Menge G mit einer Verknüpfung*

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g,h) & \longmapsto & gh \end{array}$$

die folgende Eigenschaften besitzt:

1. $a(bc) = (ab)c \quad \forall a,b,c \in G$ *Assoziativgesetz*
2. $\exists\, e \in G$ *mit* $ae = a \; \forall a \in G$ *Existenz der Einheit (man schreibt $e = 1$)*
3. $\forall\ a \in G \quad \exists\ b \in G$ *mit* $ab = ba = e$ *Existenz des Inversen (man schreibt $b = a^{-1}$)*

Definition. *Eine Gruppe heißt abelsch fals gilt:* $ab = ba \quad \forall a,b \in G$

Definition. *Eine Teilmenge $U \subset G$ nennt man Untergruppe falls*

1. $1 \in U$
2. $a \in U \;\Rightarrow\; a^{-1} \in U$
3. $a,b \in U \;\Rightarrow\; ab \in U$

Eine Untergruppe ist selbst eine Gruppe

Definition. Ordnung

1. *Die Ordnung einer Gruppe bzw. Untergruppe ist die Anzahl ihrer Elemente. Man schreibt $|G|$ für die Ordnung.*
2. *Die Ordnung eines Elementes $g \in G$ ist das kleinste $n \in \mathbb{N}$ mit $g^n = 1$*

Satz. *Die Ordnung jeder Untergruppe teilt die Gruppenordnung:*

$$\frac{|G|}{|U|} \in \mathbb{N} \quad \forall \textit{ Untergruppen } U$$

Aus diesem Satz folgt z.B,

- dass Gruppen deren Ordnung eine Primzahl ist nur die trivialen Untergruppen $\{1\}, G$ besitzen.
- dass die Ordnung jedes Gruppenelementes die Gruppenordnung teilt: $\frac{|G|}{|g|} \in \mathbb{N} \quad \forall g \in G$

Eine spezielle Klasse von Gruppen, die in der Physik eine große Rolle spielen sind die Lie-Gruppen.

Definition. *Eine Lie-Gruppe ist eine Gruppe deren Elemente durch N Parameter $\{\alpha_1, ..., \alpha_N\}$ parametrisiert sind ($g(\alpha_1, ..., \alpha_N) \in G$). Die Parametrisierung muss folgende Eigenschaften haben:*

1. *die Parameter $\alpha_1, ..., \alpha_N$ sind reell und kontinuierlich variabel*
2. *die Parametrisierung ist wesentlich, d.h es ist nicht möglich die gesamte Gruppe mit weniger Parametern $\{\alpha_1, ..., \alpha_M\} \quad M \leq N$ zu parametrisieren*
3. *die Multiplikation ist analytisch, d.h*
   Für $\vec{\gamma}$,$\vec{\alpha}$,$\vec{\beta}$ mit $g(\vec{\gamma}) = g(\vec{\alpha})g(\vec{\beta})$ gilt $\vec{\gamma} = \phi(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$, wobei ϕ eine analytische Funktion ist

Bemerkung. *Eine endliche Gruppe kann keine Lie-Gruppe sein*

Beispiele

GL(n) General linear group

GL(n)=Menge der invertierbaren (reellen) nxn-Matrizen

GL(n) ist eine Gruppe mit der Matrixmultiplikation, denn

- die Einheitsmatrix ist das neutrale Element
- ein Inverses existiert da alle Matrizen in GL(n) invertierbar sind

GL(2)

GL(2) ist eine Lie-Gruppe, wobei jede Matrix durch ihre Komponenten parametrisiert wird.

- die Multiplikation analytisch. Denn für die Komponenten bzw. Parameter des Produktes zweier Matrizen (C=AB) gilt:

  $$c_{ij} = \sum_k a_{ik} b_{kj}$$

  Dieser Zusammenhang ist analytisch
- Parameter reell und kontinuierlich: klar
- es lässt sich zeigen, dass die Parametrisierung wesentlich ist

3 Darstellungen von Gruppen

Definition. *Ein Homomorphismus ist eine Abbildung $f : G \longrightarrow H$ zwischen Gruppen G,H, die mit der Gruppenstruktur verträglich ist, d.h.*

$$f(ab) = f(a)f(b)\ \forall a, b \in G$$

$$Ker\, f := \{g \in G\ :\ f(g) = 1\}$$
$$Bild\, f := \{f(g)\ :\ g \in G\}$$

Bemerkung. *$Ker\, f$ bzw. $Bild\, f$ sind Untergruppen von G bzw. H.*
Ein Homomorphismus ist genau dann injektiv wenn $Ker\, f = \{1\}$.
Ein Homomorphismus ist genau dann surjektiv wenn $Bild\, f = H$.

Die Untersuchung von Gruppen lässt sich auf die Untersuchung von Untergruppen der Menge Automorphismen auf einem Vektorraum zurückführen. D.h. dass endliche Gruppen untersucht werden können in dem man Untergruppen von GL(n) untersucht.

Definition. *Eine Darstellung ist ein Homomorphismus $D : G \longrightarrow Aut(V)$. Wobei V ein Vektorraum und $Aut(V)$ die Menge der Automorphismen auf V sind.*
Eine Darstellung heißt treu, falls D injektiv ist.
Die Dimension einer Darstellung ist die Dimension von V.

Satz. *Zu jeder endlichen Gruppe G, mit $n = |G|$, existiert eine n-dimensionale treue Darstellung.*

Konstruktion der regulären Darstellung

1. V:=Menge der komplexwertigen Funktionen auf G
   Identifiziere die Elemente g von G mit den Funktionen
   $$g_V(h) := \begin{cases} 1 & h = g \\ 0 & sonst \end{cases}$$
   Die Menge $\{g_v \,:\, g \in G\}$ bildet eine Basis von V.
   Folglich lässt sich jedes $\alpha \in V$ wie folgt darstellen:
   $$\alpha = \sum_{g \in G} \alpha(g) g_V$$
2. Definiere die Abb. $D : G \longrightarrow Aut(V)$ wie folgt:
   $$D(g)(\alpha) = D(g)\left(\sum_{h \in G} \alpha(h) h_V\right) := \sum_{h \in G} \alpha(h)\,(gh)_V$$
   $D(g)$ ist ein Automorphismus, weil $\{(gh)_V \,:\, h \in G\}$ eine Basis von V ist.
3. D ist injektiv, da:
   Sei D(g)=1, dann gilt
   $$\sum_{h \in G} \alpha(h) h_V = \sum_{h \in G} \alpha(h)\,(gh)_V \quad \forall \alpha \in V$$
   $$\Rightarrow \quad gh = h \;\forall h \quad \Rightarrow \quad g = 1 \quad \Rightarrow \quad Ker\, D = \{1\}$$

Bemerkung. *Bei der regulären Darstellung hat die darstellende Matrix die folgende Form:*
$$D(g)_{ab} = \begin{cases} 1 & a = gb \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Bemerkung. *Eine Gruppe der Ordnung $n = |G|$ kann auch eine treue Darstellung der Dimension m<n haben.*

Beispiel: Die Permutationen der Zahlen 1,...,n bilden eine Gruppe S_n (symmetrische Gruppe). Durch folgende Matrix ist eine treue Darstellung gegeben:
$$D(\sigma)_{ik} = \begin{cases} 1 & i = \sigma(k) \\ 0 & sonst \end{cases}$$
Die Dimension der Darstellung ist n, die Ordnung der Gruppe S_n ist jedoch n!.

Definition. *Eine unitäre Darstellung ist eine Homomorphismus $D : G \longrightarrow Aut(H)$. Wobei H ein Hilbertraum und $Aut(H)$ die Menge der unitären Operatoren auf H sind.*

Bemerkung. *Ein Operator auf einem Hilbertraum ($U : H \to H$) heißt unitär falls gilt $U^{-1} = U^*$. Ein surjektiver Operator ist genau dann unitär, wenn er Skalarprodukte invariant lässt:* $(Ua|Ub) = (a|b) \quad \forall a, b \in H$.

Satz. *Jede Darstellung einer endlichen Gruppe auf einem endlichen Vektorraum ist bezüglich eines geeignet gewählten Skalarproduktes unitär.*

Bemerkung. *Dieser Satz lässt sich auf unendliche kompakte Gruppen ausdehnen.*

Reduzibilität von Darstellungen

Ein Teilraum $U \subset V$ heißt invariant bzgl. einer Abbildung f, falls gilt $f(U) \subset U$. Ist U invariant, dann lässt sich f auf U einschränken: $f_U : U \to U$.

Definition. *Ist $D : G \longrightarrow Aut(V)$ eine Darstellung und existiert ein echter invarianter Teilraum $U \subset V$ bzgl. aller $f \in Aut(V)$, so heißt die Darstellung reduzibel.*

In diesem Fall definiert die Einschränkung aller Darsteller $D(g)_U$ auf U eine Teildarstellung $D_U : G \longrightarrow Aut(U)$.

Eine Darstellung heißt irreduzibel, falls kein solches U existiert.

Sei D reduzibel und D_1 eine Teildarstellung. Dann haben die darstellenden Matrizen (nach Wahl einer geeigneten Basis) folgende Form:

$$D(g) = \begin{pmatrix} D_1(g) & Q(g) \\ 0 & D_2(g) \end{pmatrix}$$

Ist Q=0, so ist auch D_2 eine Teildarstellung.

Definition. *Man sagt, dass eine Darstellung $D : G \longrightarrow Aut(H)$ zerfällt, falls sich die darstellende Matrix auf die obige Blockform bringen lässt und Q=0. Man schreibt dann $D = D_1 \oplus D_2$ und sagt D ist die direkte Summe der Teildarstellungen D_1 und D_2.*

Satz. *Jeder reduzible unitäre Darstellung zerfällt.*

Satz. *Jeder reduzible Darstellung einer endlichen Gruppe zerfällt.*

Bemerkung. *Dieser Satz lässt sich auf kompakte unendliche Gruppen ausdehnen.*

Beispiel

Betrachte die Gruppe der folgenden Ortstransformationen:

$$\vec{r} \longrightarrow \vec{r}' = R\vec{r} + \vec{a} \qquad R \in O(n),\ a \in \mathbb{R}^n$$

Diese Gruppe (euklidische Gruppe) besitzt folgende Darstellung:

$$D(\vec{a}, R) = \begin{pmatrix} R & \vec{a} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es existiert eine Teildarstellung $D_1(\vec{a}, R) = R$. Die Darstellung zerfällt jedoch nicht, da $Q = \vec{a} \neq 0$.

4 Noethertheorem

Im folgenden soll das Noethertheorem in der klassischen Feldtheorie besprochen werden. Vorerst sollen der Lagrangeformalismus für Feldtheorien kurz angerissen werden.

Lagrangeformalismus

Klassische Mechanik

- unabhängige Koordinaten: t
- dynamischer Zustand wird
- beschrieben durch: $q_i(t), \dot{q}_i(t)$
- Lagrangefunktion: $L(t, q_i(t), \dot{q}_i(t))$
- Wirkung:
$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t)dt$$
- Hamiltonsches Prinzip:
$$\delta S = 0$$
- Lagrange-Gleichungen:
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$$

Die Lagrange-Gleichungen sind äquivalent zum Hamiltonschen Prinzip, das besagt, dass die Wirkung bei der tatsächlichen Teilchenbahn extremal wird.

Klassische Feldtheorie

- unabhängige Koordinaten: $(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$
- dynamischer Zustand wird
- beschrieben durch: $\psi_i(x^k)$, $\psi_{i,j}(x^k) = \frac{\partial}{\partial x^j}\psi_i(x^k)$
- Lagrangedichte: $\mathcal{L}(x^k, \psi_i(x^k), \psi_{i,j}(x^k))$
- Wirkung:
$$S = \int_V \mathcal{L}(x^k, \psi_i(x^k), \psi_{i,j}(x^k))d^4x$$
- Hamiltonsches Prinzip:
$$\delta S = 0$$

- Lagrange-Gleichungen:

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{i,j}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} = 0$$

Noethertheorem

Wir betrachten infinitesimale (ϵ infinitesimal) Transformationen der Felder und Koordinaten:

$$\begin{aligned} x^k &\longrightarrow x'^k = x^k + \epsilon \alpha^k(x, \psi_i(x), \psi_{i,j}(x)) \\ \psi_i &\longrightarrow \psi_i' = \psi_i + \epsilon \phi_i(x, \psi_i(x), \psi_{i,j}(x)) \end{aligned}$$

Das Noethertheorem besagt:

Ist ein System invariant gegenüber obiger Transformation so besitzt es eine Erhaltungsgröße. Mit Invarianz ist die Gleichheit der Wirkung gemeint. Die Erhaltungsgröße bestimmt sich wie folgt:

$$J^i = \sum_{jk} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{j,i}} \left(\psi_{j,k} \alpha^k - \phi_j \right) - \mathcal{L} \alpha^i$$

$$\begin{aligned} &\sum_i \frac{\partial J^i}{\partial x^i} = 0 \\ \Rightarrow \quad &\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\int_{V_3} J^0 d^3x}_{Q} = 0 \\ \Rightarrow \quad &Q = const. \end{aligned}$$

Bemerkung. *Die Invarianz lässt sich mit Hilfe der Invarianzbedingung überprüfen:*

$$\frac{d}{d\epsilon} \left(\mathcal{L}(x'^k, {\psi'}_i(x'^k), {\psi'}_{i,j}(x'^k)) \frac{d^4x'}{d^4x} \right)_{\epsilon=0} = 0$$

Beweis des Noethertheorems

$$\begin{aligned}
S = S' \quad &\Leftrightarrow \quad \int_V d^4x \left[\frac{d^4x'}{d^4x} \mathcal{L}\left(x', \psi_i', \psi_{i,j}'\right) - \mathcal{L}\left(x, \psi_i, \psi_{i,j}\right) \right] = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \int_V d^4x \frac{d}{d\epsilon} \left[\mathcal{L}(x', \psi'_i, \psi'_{i,j}) \frac{d^4x'}{d^4x} \right]_{\epsilon=0} \epsilon = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{d}{d\epsilon} \left[\mathcal{L}(x', \psi'_i, \psi'_{i,j}) \frac{d^4x'}{d^4x} \right]_{\epsilon=0} = 0 \quad \text{da V bel.} \\
0 \quad &= \quad \frac{d}{d\epsilon} \left[\mathcal{L}(x', \psi'_i, \psi'_{i,j}) \frac{d^4x'}{d^4x} \right]_{\epsilon=0} \\
... \quad &= \quad \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{i,k}} \left(\phi_i - \psi_{i,j}\alpha^j\right) + \mathcal{L}\alpha^k \right] \\
&=: \quad \frac{\partial}{\partial x^k} J^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 \quad &= \quad \frac{\partial}{\partial x^k} J^k \\
0 \quad &= \quad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} J^0 + div\, \vec{J} \qquad \vec{J} = \left(J^1, J^2, J^3\right) \\
\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_3} d^3x\, J^0 \quad &= \quad - \int_{V_3} d^3x\, div \vec{J} \\
&= \quad - \int_S d\vec{f} \cdot \vec{J} \\
&= \quad 0 \qquad \text{für V groß genug} \\
\Rightarrow Q \quad &= \quad \int_{V_3} d^3x\, J^0 = const.
\end{aligned}$$

Beispiele

Eichtransformation des Schrödingerfeldes

Folgende Lagrangedichte liefert mittels der Lagrange-Gleichungen die Schrödingerglei-chung:

$$\mathcal{L} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla\psi^* \cdot \nabla\psi - V(\vec{r}, t)\psi^*\psi + i\hbar\psi^* \frac{\partial}{\partial t}\psi$$

Bei diesem Formalismus sind ψ, ψ^* als unabhängige Felder zu betrachten.

Die folgende Eichtransformation lässt die Lagrangedichte invariant:

$$
\begin{aligned}
x^k &\longrightarrow x'^k = x^k \\
\psi &\longrightarrow \psi' = \psi e^{i\epsilon} = \psi + i\epsilon\psi \\
\psi^* &\longrightarrow \psi'^* = \psi^* e^{-i\epsilon} = \psi^* - i\epsilon\psi^* \\
\alpha^k &= 0 \\
\phi_1 &= i\psi \\
\phi_2 &= -i\psi^*
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich folgender Strom J und Erhaltungsgröße Q:

$$
\begin{aligned}
J^0 &= c\hbar\psi^*\psi =: c\hbar\rho \\
J^k &= \frac{\hbar^2}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x^k} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x^k}\right) =: \hbar j^k \quad k = 1,2,3
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial J^i}{\partial x^i} = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\rho} + div\vec{j} = 0
$$

$$
Q = \int \rho \, d^3x = const.
$$

Impulserhaltung eines abgeschlossenen Teilchensystems

Ein Teilchensystem von N mit einander wechselwirkenden Teilchen wird durch folgende Lagrangefunktion beschrieben:

$$
L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 + V\left(|\vec{r}_j - \vec{r}_k|\right)
$$

Diese Lagrangefunktion ist invariant gegenüber folgenden Transformation:

$$
\begin{aligned}
t &\longrightarrow t' = t \\
\vec{r}_i &\longrightarrow \vec{r}_i' = \vec{r}_i + \epsilon\vec{a} \\
\alpha &= 0 \\
\vec{\phi}_i &= \vec{a}
\end{aligned}
$$

Damit ergibt sich folgender Strom und Erhaltungsgröße Q:

$$
J = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \vec{\phi}_i = \left(\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i\right) \cdot \vec{a}
$$

$$
\frac{d}{dt} J = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i\right) \cdot \vec{a} = const.
$$

$$\vec{a} \quad \text{bel.} \quad \Rightarrow \quad \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = const.$$

Aus der Invarianz von L gegenüber (infinitesimalen) Raumtranslationen folgt die Erhaltung des Gesamtimpulses $\vec{P} = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i$.

- Invarianz gegenüber Raumtranslationen $\longrightarrow$ Impulserhaltung
- Invarianz gegenüber Zeittranslationen $\longrightarrow$ Energieerhaltung
- Invarianz gegenüber Raumdrehungen $\longrightarrow$ Drehimpulserhaltung