Übungsblatt 8: (12 P.) **Abgabe: 24.05.07**

Aufgabe 1:(schriftlich)

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ beliebige Zustände aus $\mathcal{H}$.

a)[**1 P.**] Beweisen Sie die Parallelogrammgleichung:

$$\|\alpha + \beta\|^2 + \|\alpha - \beta\|^2 = 2\|\alpha\|^2 + 2\|\beta\|^2.$$

b)[**2 P.**] Beweisen Sie die Schwarz'sche Ungleichung:

$$|\langle\alpha|\beta\rangle| \leq \|\alpha\|\|\beta\|.$$

Hinweis: Zerlegen Sie zunächst den Vektor $|\beta\rangle$ in Komponenten parallel und senkrecht zu $|\alpha\rangle$ und berechnen Sie dann $\|\beta\|^2$.

c)[**1 P.**] Verifizieren Sie mit Hilfe der Schwarz'schen Ungleichung die Dreiecksungleichung:

$$|\,\|\alpha\| - \|\beta\|\,| \leq \|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|.$$

Aufgabe 2:(schriftlich)

Nehmen Sie an, dass für zwei Operatoren A und B gilt:

$$[A,\, B] = i\,\mathbf{1}.$$

Beweisen Sie, dass dann für $n = 1, 2, 3, \ldots$ folgt:

a)[**1 P.**]

$$[A,\, B^n] = inB^{n-1} = i\frac{d}{dB}B^n.$$

b)[**1 P.**]

$$[A^n,\, B] = inA^{n-1} = i\frac{d}{dA}A^n.$$

Hinweis: Benutzen Sie die Methode der vollständigen Induktion sowie die folgenden Relationen:

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C, \quad [AB, C] = A[B, C] + [A, C]B,$$

wobei A, B und C lineare Operatoren sind.

Aufgabe 3:[3 P.](mündlich)

Sei $\mathcal{H}$ die Menge aller Spaltenvektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} := (a_n),$$

deren Komponenten komplexe Zahlen sind mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Addition und Multiplikation mit einer komplexen Zahl seien komponentenweise erklärt:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_n + b_n), \quad c\,\mathbf{a} = (c\,a_n).$$

Das Skalarprodukt sei definiert durch:

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum ist.

Aufgabe 4:(mündlich)

Gegeben sei die hermitesche Matrix

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}.$$

a)[**1 P.**] Bestimmen Sie die Eigenwerte E_1 und E_2.

b)[**1 P.**] Berechnen Sie die zugehörige Eigenzustände.

c)[**1 P.**] Mit Hilfe von a) und b) bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren für die Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}.$$