
Übungsblatt 7: (15 P.) **Abgabe: 21.05.07**

Aufgabe 1: (schriftlich)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das zu einem bestimmten Zeitpunkt die auf eins normierte, eindimensionale Zustandsfunktion

$$\psi(x) = \begin{cases} Nxe^{-ax}, & \text{für} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{für} \quad x < 0 \end{cases}, \qquad a > 0$$

besitzt. Hierbei ist N eine Normierungskonstante.

a)[**1 P.**] Berechnen Sie die Normierungskonstante N.

Hinweis: Verwenden Sie die Bedignung $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ und die Formel

$$\int_0^{+\infty} d\xi \xi^n e^{-\xi} = n!, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

b)[**2 P.**] Bestimmen Sie mit der Hilfe der Fouriertransformation der Zustandsfunktion $\psi(x)$ in der Ortsdarstellung die Zustandsfunktion $\widetilde{\psi}(p)$ in der Impulsdarstellung.

c)[**2 P.**] Berechnen Sie jetzt die Wahrscheinlichkeit W dafür, bei einer Messung des Impulses p zum betreffenden Zeitpunkt ein Wert zwischen $-\hbar a$ und $\hbar a$ zu messen.

Hinweis: Verwenden Sie die Formel

$$\int \frac{d\xi}{(\xi^2 + \alpha^2)^2} = \frac{\xi}{2\alpha^2(\xi^2 + \alpha^2)} + \frac{1}{2\alpha^3} \arctan \frac{\xi}{\alpha} + C, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

Aufgabe 2: (schriftlich)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das sich in einem unendlich tiefen eindimensionlen Kastenpotential

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad |x| \leq a, \\ +\infty, & \text{für} \quad |x| > a \end{cases}$$

befindet. Zu einem bestimmten Zeitpunkt sei seine Zustandsfunktion $\psi(x)$ durch

$$\psi(x) = N(a^2 - x^2), \quad |x| \leq a$$

gegeben, wobei N eine Normierungskonstanke ist.

a)[**1 P.**] Bestimmen Sie zunächst die Normierungskonstante N.

b)[**3 P.**] Nehmen Sie an, dass bei einer Messung der Energie des Teilchens zum betreffenden Zeitpunkt der Messwert

$$E_{n-1} = \frac{\hbar^2\pi^2}{8ma^2} n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

gefunden wurde. Zeigen Sie, dass die Entwicklungskoeffizienten $c_{n-1} := \langle n-1|\psi\rangle$ in diesem Fall durch

$$c_{n-1} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \frac{8\sqrt{15}}{(n\pi)^3}, & n \quad \text{ungerade}, \\ 0, & n \quad \text{gerade} \end{cases}$$

gegeben sind.

Hinweis: Die Energieeigenfunktionen $\psi_{n-1}(x)$ für das unendlich tiefe Kastenpotential sind durch

$$\psi_{n-1} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{n\pi x}{2a}, & |x| \le a \quad n \quad \text{ungerade}, \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{n\pi x}{2a}, & |x| \le a \quad n \quad \text{gerade} \end{cases}$$

gegeben. Benutzen Sie auch die Formel

$$\int d\xi \xi^2 \cos \alpha\xi = \frac{2\xi}{\alpha^2} \cos \alpha\xi + \frac{\alpha^2\xi^2 - 2}{\alpha^3} \sin \alpha\xi + C, \qquad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

b)[**1 P.**] Berechnen Sie nun die Wahrschenlichkeit W_{n-1} dafür, den Messwert E_{n-1} zum diesen Zeitpunkt zu finden.

c)[**2 P.**] Zeigen Sie, dass Erwartungswert und Unschärfe der Energie zu diesem Zeitpunkt durch

$$\langle H \rangle = \frac{5\hbar^2}{4ma^2}, \qquad \triangle E = \frac{\sqrt{5}\hbar^2}{4ma^2}$$

gegeben sind.

Hinweis: Benutzen Sie die folgende Formeln:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Aufgabe 3: (mündlich)

Nehmen Sie an, dass die Zustandsfunktion eines Teilchens in der Ortsdarstellung reell ist.

a)[**1 P.**] Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich des Impulses im Impulsraum inversionssymmetrisch in Bezug auf den Ursprung ist, d.h. $|\widetilde{\psi}(p)|^2 = |\widetilde{\psi}(-p)|^2$.

b)[**1 P.**] Beweisen Sie, dass der Erwartungswert des Teilchenimpulses null ist.