`Übungen zu Atom- und Quantenmechanik/Physik IV, SoSe 2007`

Prof. Dr. R. Friedrich/Prof. Dr. H. Zacharias

Übungen im WWW: `http://pauli.uni-muenster.de/tp/`

Übungsblatt 6: (14 P.) **Abgabe: 10.05.07**

Aufgabe 1: (schriftlich)

Ein Teilchen der Masse m befindet sich in einem eindimensionalen Potential, das an der Stelle $x = x_0$ längs einer kleinen Strecke sehr stark anziehend ($D > 0$) (bzw. abstoßend ($D < 0$)) ist,

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} D\delta(x - x_0) + V_1(x), \qquad D > 0 \ (D < 0).$$

Hierbei stellt $V_1(x)$ ein in der Umgebung der Stelle $x = x_0$ stetiges Potential dar. Nehmen Sie an, dass die Energieeigenfunktionen $\psi(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$ stetig sind, d.h.

$$\psi(x_0-) = \psi(x_0+) \equiv \psi(x_0).$$

a)**[1 P.]** Integrieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleihung über ein Intervall $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$.

Hinweis: Benützen Sie die Eigenschaft

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0), \qquad \text{falls} \quad a < x_0 < b$$

ist.

b)**[1 P.]** Zeigen Sie, dass die erste Ableitung der Energieeigenfunktion $\psi(x)$ an der Stelle $x = x_0$ einen durch

$$\psi'(x_0-) = \psi(x_0+) + 2D\psi(x_0)$$

gegebenen Sprung besitzt.

Hinweis: Füren Sie den Grenzübergang $\varepsilon \to 0+$ durch.

c)**[1 P.]** Formulieren Sie die Anschlussbedingungen für die Energieeigenfunktionen $\psi(x)$ an der Stelle $x = x_0$.

Aufgabe 2: (schriftlich)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in dem eindimensionalen anziehenden δ-förmigen Potential

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} D\delta(x), \qquad D > 0.$$

a)**[1 P.]** Lösen Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für den Fall $E < 0$.

b)**[2 P.]** Zeigen Sie, dass in diesem Fall es nur einen gebundenen Zustand gibt.

c)**[1 P.]** Finden Sie die Energie E dieses gebundenen Zustandes und die zugehörige auf eins normierte Eigenfunktion $\psi_E(x)$.

Hinweis: Lösen Sie die Schrödingergleichung für die Bereiche $x < 0$ bzw. $x > 0$ und verwenden Sie in Aufgabe 1 c) abgeleiteten Anschlussbedingungen.

Aufgabe 3: (mündlich)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m in dem eindimensionalen Potential ($D > 0$)

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\hbar^2}{m} D\delta(x), & |x| \leq a, \\ +\infty, & |x| > a. \end{cases}$$

a)**[3 P.]** Leiten Sie die Lösbarkeitsbedignungen für die Energieeigenwerte E_{n-1}, $n \in \mathrm{N}$ ab für den Fall von geraden und ungeraden Funktionen $\psi(x)$.

Hinweis: Verwenden Sie die abgeleiteten in Aufgabe 1 c) Anschlussbedingungen.

b)**[2 P.]** Diskutieren Sie graphisch die Eigenschaften des erhaltenen Spektrums je nach der Größe von Da.

c)**[1 P.]** Untersuchen Sie speziell die Grenzfälle $Da \to 0+$ und $Da \to +\infty$.