Übungsblatt 12: (12 P.) **Abgabe: 28.06.07**

Aufgabe 1: (schriftlich)

Betrachten Sie das Wasserstoffatom ohne Berücksichtigung des Spins und ohne relativistische Korrekturen. Berechnen Sie für den Grundzustand

a)**[3 P.]** den wahrscheinlichsten Wert für den Abstand des Elektrons vom Kern;

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Antreffwahrscheinlichkeit

$$W_{10}(r)\,dr := r^2 dr \int_{[4\pi]} d\Omega |u_{100}(\overrightarrow{r})|^2$$

für die Kugelscale mit dem inneren Radius r und dem äußeren Radius $r + dr$. Verwenden Sie dabei die Grundzustandseigenfunktionen

$$u_{100}(\overrightarrow{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_H^3}} \exp\left[-\frac{r}{a_H}\right], \qquad a_H := \frac{\hbar}{m_e^2}\left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right).$$

b)**[1 P.]** den Erwartungswert und die Unbestimmtheit dieses Abstandes;

Hinweis: Benutzen Sie die Formel

$$\int_0^{+\infty} d\rho\, \rho^\nu\, e^{-\beta\rho} = \frac{\nu!}{\beta^{\nu+1}}, \qquad \nu \in \mathbb{N}_0, \quad \beta \in \mathbb{R}^+.$$

c)**[1 P.]** die Wahrscheinlichkeit dafür, das Elektron in einem Abstand $r > a_H$ anzutreffen;

Hinweis: Verwenden Sie die Formel

$$\int d\rho\, \rho^2\, e^{-\beta\rho} = -\left[\frac{\rho^2}{\beta} + \frac{2\rho}{\beta^2} + \frac{2}{\beta^3}\right] e^{-\beta\rho} + C.$$

d)**[3 P.]** den wahrscheinlichsten Wert für den Impulsbetrag;

Hinweis: Analog zu a) berechnen Sie zunächst

$$W_{10}(p)\,dp = p^2\,dp \int_{[4\pi]} d\Omega_p |\widetilde{u}_{100}(\overrightarrow{p})|^2$$

mit

$$\widetilde{u}_{100}(\overrightarrow{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3r\, e^{-(i/\hbar)\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{r}}\, u_{100}(\overrightarrow{r}).$$

Verwenden Sie auch die Formel

$$\int_0^{+\infty} d\xi \xi \sin(\alpha\xi)\, e^{-\beta\xi} = \frac{2\alpha\beta}{(\alpha^2+\beta^2)^2}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \beta \in \mathbb{R}^+.$$

Aufgabe 2:[2 P.] **(mündlich)**

Betrachten Sie den Quantenzahloperator $N = b^\dagger b$, wobei b und $b^\dagger$ der Erzeugungs- und der Vernichtungsoperatoren sind. Verifizieren Sie die folgenden Kommutatorrelationen:

1) $[b^m, b^\dagger] = m\, b^{m-1}$,

2) $[b, b^{\dagger m}] = m\, (b^\dagger)^{m-1}$,

3) $[N, b^m] = -m\, b^m$,

4) $[N, b^{\dagger m}] = m\, b^{\dagger m}$.

Hinweis: Bei 1) und 2) benutzen Sie die Methode der vollständigen Induktion.

Aufgabe 3:[2 P.] **(mündlich)**

Beweisen Sie explizit die Orthonormalität $\langle n \,|\, m \,\rangle = \delta_{n,m}$ der Eigenzustände

$$|\, n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^\dagger)^n |\, 0\,\rangle$$

des Quantenzahloperators N.

Hinweis: Betrachten Sie o. B. d. A. den Fall $n > m$ und benutzen Sie die Formel $b\,|\, n\,\rangle = \sqrt{n}\,|\, n-1\,\rangle$.