
Übungsblatt 11: (11 P.) **Abgabe: 21.06.07**

Aufgabe 1:[2 P.] (schriftlich)

Berechnen Sie für die Energieeigenzustände $|\, n\,\rangle$, $n \in \mathbb{N}_0$ des linearen harmonischen Oszillators die Erwartungswerte der zu den Operatoren X, X^2, X^3, X^4, P, P^2, P^3, P^4 gehörigen Observablen, die Unschärfen $\triangle x$, $\triangle p$ sowie das Unschärfenprodukt $\triangle x \cdot \triangle p$.

Hinweis: Drücken Sie die Potenzen von X und P durch den Erzeugungsoperator $b^\dagger$ bzw. den Vernichtungsoperator b der Oszillatorquanten aus. Verwenden Sie auch den Quantenzahloperator $N = b^\dagger b$, $N^\dagger = N$ sowie die Vertauschungsbeziehung $[b, b^\dagger] = \mathbf{1}$ zwischen b und $b^\dagger$.

Aufgabe 2:[1 P.] (schriftlich)

Verifizieren Sie, dass für die Energieeigenzustände des linearen harmonischen Oszillators

$$\langle T\rangle = \langle V\rangle$$

gilt, wobei T und V Operatoren der kinetischen und der potentiellen Energie sind.

Hinweis: Benutzen Sie die Ausdrücke für $\langle X^2\rangle$ und $\langle P^2\rangle$ von der Aufgabe 1.

Aufgabe 3:[2 P.] (schriftlich)

Der Zustandsvektor eines linearen harmonischen Oszillators sei zu einem bestimmten Zeitpunkt durch die folgende Linearkombination seiner Energieeigenzustände $|\,0\,\rangle$, $|\,1\,\rangle$ gegeben:

$$|\,\psi\,\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\,0\,\rangle - i\frac{1}{3}\,|\,1\,\rangle.$$

Berechnen Sie für diesen Zeitpunkt das Unschärfenprodukt $\triangle x \cdot \triangle p$.

Hinweis: Verwenden Sie den Oszillatorquanten-Erzeugungsoperator $b^\dagger$ bzw. den Vernichtungsoperator b. Benutzen Sie auch die Erwartungswerte zu X, X^2, P, P^2 in den Energieeigenzuständen $|\,n\,\rangle$ von Aufgabe 1 sowie die Formeln

$$b\,|\,n\,\rangle = \sqrt{n}\,|\,n-1\,\rangle, \qquad b^\dagger\,|\,n\,\rangle = \sqrt{n+1}\,|\,n+1\,\rangle.$$

Aufgabe 4: (mündlich)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich im Oszillatorpotential

$$V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

Zu Zeit $t = 0$ werde es durch das Gaußsche Wellenpaket

$$\psi(q,0) = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{m\omega}{2\hbar}(q-\overline{q})^2\right]$$

beschrieben.

a)[**1 P.**] Entwickeln Sie $\psi(q,0)$ nach den Eigenfunktionen $\varphi_n(q)$ des linearen harmonischen Oszillators:

$$\psi(q,0) = \sum_n \alpha_n \varphi_n(q).$$

Hinweis: Benutzen Sie zur Berechnung der Koeffizienten α_n die Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-(x-x_0)^2} H_n(x) = \sqrt{\pi}(2x_0)^n.$$

b)[**2 P.**] Berechnen Sie die volle Zeitabhängigkeit der Wellenfunktion $\psi(q,t)$.

Hinweis: Verwenden Sie die folgende Darstellung der erzeugenden Funktion der Hermite-Polynome

$$\exp(-t^2 + 2tx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} H_n(x)$$

sowie die Eulersche Formel $e^{-ni\omega t} = \cos n\omega t - i \sin n\omega t$ und das Additionstheorem $\cos 2\omega t = \cos^2 \omega t - \sin^2 \omega t$.

c)[**1 P.**] Bestimmen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(q,t)|^2$ und demonstrieren Sie daran, dass das Wellenpaket im Gegensatz zu dem des freien Teilchens nicht zerfließt.

d)[**1 P.**] Geben Sie den Erwartungswert $\langle\, q \,\rangle_t$ und die mittlere quadratische Schwankung $\triangle q_t$ an.

e)[**1 P.**] Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit deren eine Energiemessung am Teilchen zur Zeit $t > 0$ den Eigenwert

$$E_n = \hbar\omega\big(n + \frac{1}{2}\big)$$

liefert.