Übungen zu Atom- und Quantenmechanik/Physik IV, SoSe 2007

Prof. Dr. R. Friedrich/Prof. Dr. H. Zacharias

Übungen im WWW: `http://pauli.uni-muenster.de/tp/`

Übungsblatt 9: (10 P.) **Abgabe: 04.06.07**

Aufgabe 1:[1 P.] (schriftlich)

Nehmen Sie an, dass ein Operator A die Eigenschaft $AA^\dagger = A^\dagger A$ besitzt. Sei $|a\rangle$ Eigenvektor von A zum Eigenwert a mit $\langle a|a\rangle = 1$. Zeigen Sie, dass $|a\rangle$ auch Eigenvektor von $A^\dagger$ zum Eigenwert a^* ist.

Aufgabe 2: (schriftlich)

Betrachten Sie einen linearen Operator A, dessen Inverses A^{-1} existiert. Sei der Vektor $|a\rangle \neq \emptyset$ Eigenvektor von A zum Eigenwert a.

a)[**1 P.**] Beweisen Sie, dass dann $|a\rangle$ auch Eigenvektor von A^{-1} ist.

b)[**1 P.**] Berechnen Sie den zugehörigen Eigenwert von A^{-1}.

Aufgabe 3: (schriftlich)[2 P.]

Betrachten Sie einen n-dimensionalen komplexen Hilbertraum H. Sei A ein selbstadjungierter Operator mit den Eigenwerten $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ und den zugehörigen normierten Eigenvektoren $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \ldots, |a_n\rangle$ gegeben. Kann aus

$$\langle u|A|u\rangle = a_k, \qquad \langle u|u\rangle = 1$$

geschlossen werden, dass der Vektor $|u\rangle$ Eigenvektor von A zum Eigenwert a_k sein muss?

Aufgabe 4: (mündlich)

Ein auf ganz $\mathcal{H}$ definierter selbstadjungierter Operator A heißt positiv definit, falls $\langle u|A|u\rangle > 0$ gilt für alle Vektoren $|u\rangle \neq \emptyset$, $|u\rangle \in \mathcal{H}$.

a) Nehmen Sie an, dass A ein rein diskretes Spektrum besitzt. Beweisen Sie nun die folgenden Sätze:

a.1)[**2 P.**] Notwendig und hinreichend für positiv definites A ist, dass alle Eigenwerte a_i von A positiv definit ist.

a.2)[**1 P.**] Ist A positiv definit, so existiert A^{-1} und ist ebenfalls positiv definit.

Hinweis: Verwenden Sie die Spektraldarstellung des Operators A, d.h.

$$A = \sum_i a_i P_i$$

mit

$$\begin{aligned}
P_j^\dagger &= P_j, \qquad P_j P_k = \delta_{jk} P_j, \\
P_j P_k &= \mathbf{0} \quad \text{Ortogonalität der Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten,} \\
\sum_i P_i &= \mathbf{1} \quad \text{Vollständigkeitsbedingung.}
\end{aligned}$$

Hierbei sind a_i Eigenwerte von A und P_i bezeichnet einen Projektionsoperator zum Eigenraum $\mathcal{H}(a_i)$.

b)**[2 P.]** Sei $\mathcal{H}$ nun dreidimensional und A sei durch die Wirkung auf die Vektoren einer orthonormierten Basis $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ folgendermaßen definiert:

$$
\begin{aligned}
A|e_1\rangle &:= |e_1\rangle - \sqrt{2}\,|e_3\rangle, \\
A|e_2\rangle &:= 3\,|e_2\rangle, \\
A|e_3\rangle &:= -\sqrt{2}\,|e_1\rangle + 5\,|e_3\rangle.
\end{aligned}
$$

Zeigen Sie, dass A selbstadjungiert und positiv definit ist.

Aufgabe 5: (mündlich)[2 P.]

Beweisen Sie den folgenden Satz: Ein Vektor $|u\rangle$, $\langle u|u\rangle = 1$ ist dann und nur dann Eigenvektor des selbstadjungierten Operators A, wenn die so genannte Unschärfe

$$\triangle a := \sqrt{\langle u|[A - \langle u|A|u\rangle \mathbf{1}]^2|u\rangle}$$

null ist.