
Übungsblatt 3: (14 P.)

Aufgabe 1: Zur Wiederholug: Das elektromagnetische Feld (schriflich)

a) [**1 P.**] Leiten Sie aus den Maxwell'schen Gleichung für das Vakuum die Wellengleichung für das elektrische Feld $\mathbf{E}$ und die magnetische Induktion $\mathbf{B}$ ab.

b) [**1 P.**] Leiten Sie aus den Maxwell'schen Gleichungen für das Vakuum die Energiebilanzgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x},t) + \nabla \cdot \mathbf{S}(\mathbf{x},t) = 0.$$

ab. Welche Bedeutung besitzen die Grössen

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},t) &= \frac{1}{2}\big(\mathbf{E}(\mathbf{x},t)^2 + \mathbf{B}(\mathbf{x},t)^2\big), \\ \mathbf{S}(\mathbf{x},t) &= \mathbf{E}(\mathbf{x},t) \times \mathbf{B}(\mathbf{x},t). \end{aligned}$$

c) [**2 P.**] Betrachten Sie die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) - \frac{1}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = 0$$

mit periodischen Randbedignungen $u(x,t) = u(x+L,t)$. Stellen Sie die Lösung als Fourierreihe

$$u(x,t) = \sum_{k_j=-\infty}^{+\infty} e^{ik_jx}u_j(t).$$

dar. Wie sind die Grössen k_j zu wählen, damit die periodischen Randbedignungen erfüllt sind? Welche Differentialgleichung müssen die Amplituden $u_j(t)$ genügen?

d) [**1 P.**] Wieviele Schwingungsmoden, d.h. wieviele Fourierkomponenten gibt es im Intervall zwischen k und $k + \Delta k$ im Grenzfall grosser Längen L?

e) [**2 P.**] Betrachten Sie jetzt die Wellengleichung für das elektrische Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$

$$\big(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\big)\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = 0$$

mit den periodischen Randbedignungen

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x,y,z,t) &= \mathbf{E}(x+L_x,y,z,t), \\ \mathbf{E}(x,y,z,t) &= \mathbf{E}(x,y+L_y,z,t), \\ \mathbf{E}(x,y,z,t) &= \mathbf{E}(x,y,z+L_z,t). \end{aligned}$$

Stellen Sie $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ wiederum als Fourierreihe

$$\mathbf{E}(\mathbf{x},t) = \sum_{k_{jx}k_{jy}k_{jz}} e^{k_{jx}x+k_{jy}y+k_{jz}z}\mathbf{E}_{k_{jx},k_{jy},k_{jz}}(t)$$

dar. Wie sind die Grössen k_{jx}, k_{jy}, k_{jz} zu wählen? Welchen Differentialgleihung müssen die Amplituden $\mathbf{E}_{k_{jx},k_{jy},k_{jz}}(t)$ genügen?

f) **[2 P.]** Wieviele Schwingungsmoden gibt es, deren Wellenvektoren (k_{jx}, k_{jy}, k_{jz}) im Volumenelement $k_{jx} < k_x < k_{jx} + \Delta k_x$, $k_{jy} < k_y < k_{jy} + \Delta k_y$, $k_{jz} < k_z < k_{jz} + \Delta k_z$ liegen? Beweisen Sie die Transversalitäts-Bedignung

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) = 0,$$

wobei $\mathbf{k}$ den Vektor $\mathbf{k} = (k_{jx}, k_{jy}, k_{jz})$ gezeichnet.

h) **[1 P.]** Wie lautet das dazugehörige Feld der magnetischen Induktion $\mathbf{B}$?

i) **[1 P.]** Bestimmen Sie die Energiedichte $u(\mathbf{x},t)$ des elektomagnetischen Feldes sowie die über das Volumen gemittelte Energiedichte

$$\overline{u}(t) = \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy \int_0^{L_z} dz \ u(\mathbf{x},t).$$

Aufgabe 2: Das Wien'sche Verschiebungsgesetz (mündlich) [1 P.]

Leiten Sie aus der Planck'schen Stralungsformel das Wien'sche Verschiebungsgesetz ab.

Aufgabe 3: (mündlich) [1 P.]

Berechnen Sie die Temperatur der Sonne und die Energiedichte der Strahlung im Inneren der Sonne mit der Annahme, dass die Sonne ein sphärischer Schwarzen Körper mit dem Radius $R = 7 \times 10^8 \ m$ ist. Die Intensität der Sonnenstrahlung an der Oberfläche der Erde, die von der Sonne $1.5 \times 10^{11} m$ entfernt ist, ist $1.4 \times 10^3 \ W/m^2$. Nehmen Sie an, dass die Energiedichte im Inneren der Sonne homogen ist. Ist diese Annahme realistisch?

Aufgabe 4: (mündlich) [1 P.]

Wie groß ist die Wellenlänge des spektralen Maximums der Strahlung von dem Schwarzen Körper (schwarze Strahlung) bei 300 K (Raumtemperatur)? Berechnen Sie die monochromatische Energiedichte, die dieser Frequenz entspricht.