## Übungsblatt 2: Zur Wiederholung: Das Kepler-/Wasserstoffproblem (12 P.)

### Aufgabe 1: (schriftlich)

Betrachten Sie zwei Massenpunkte der Massen $m$ und $M$ bzw. zwei geladene Teilchen mit den Ladungen $q_1$ und $q_2$ ($q_1 > 0$), ($q_2 < 0$).

a) **[1 P.]** Formulieren Sie die Newton'schen Bewegungsgleichungen.

b) **[1 P.]** Führen Sie Schwerpunkt und Relativkoordinaten ein.

c) **[1 P.]** Betrachten Sie jetzt die Relativ-Bewegung. Formulieren Sie den Erhaltungssatz für den Drehimpuls $\mathbf{L}$. Was folgt aus diesem Erhaltungssatz?

d) **[2 P.]** Formulieren Sie den Energieerhaltungssatz. Benutzen Sie dazu Polarkoordinaten ($r$, $\varphi$).

e) **[2 P.]** Diskutieren Sie qualitativ die möglichen Bewegungen. Betrachten Sie dazu das effektive Potential

$$V(r) = -\gamma \frac{mM}{r} + \frac{L^2}{2\mu r^2}, \tag{1}$$

wobei

$$\mu = \frac{mM}{m+M}$$

die reduzierte Masse bezeichnet.

f) **[1 P.]** Bestimmen Sie jetzt die möglichen Bahnen. Betrachten Sie dazu $r(t)$ als Funktion des Winkels $\varphi(t)$:

$$r(t) = R(\varphi(t)). \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass folgende Relation gilt:

$$\dot{r}(t) = \frac{L_z}{mR^2} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \tag{3}$$

Hinweis: Berechnen Sie die zeitliche Ableitung von $R(\varphi(t))$ und benützen

Sie die Erhaltung des Drehimpulses.

g) **[1 P.]** Formulieren Sie den Energiesatz für $R(\varphi)$. Führen Sie die neue Variable

$$w(\varphi) = \frac{1}{R(\varphi)}$$

ein. Bestimmen Sie aus dem Energiesatz folgende Differentialgleichung für $w(\varphi)$:

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} w(\varphi) + w(\varphi) = P \tag{4}$$

Bestimmen Sie die Konstante P.

h) **[3 P.]** Bestimmen Sie die Bahnkurve $R(\phi)$. Welche Bewegungen sind möglich?