

Übungsblatt 1: Fourier-Reihen and Fourier-Integrale (15 Punkte)

Aufgabe 1: Fourier-Reihen

Betrachten Sie Funktionen $f(x)$, die im Intervall $-L/2 \leq x \leq L/2$ definiert sind und periodische Randbedingungen erfüllen:

$$f(-L/2) = f(L/2) \quad (1)$$

Diese Funktionen sind als Fourier-Reihe darstellbar:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{L}} e^{inkx} \quad (2)$$

Dabei ist $k = 2\pi/L$.

a) [1 P.] Wie können die Fourier-Koeffizienten c_n aus der Funktion $f(x)$ bestimmt werden.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst die Relation

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-inkx} \frac{1}{\sqrt{L}} e^{imkx} = \delta_{nm} \quad (3)$$

b) [2 P.] Welche Relation müssen die Fourier-Koeffizienten c_n erfüllen, falls

- 1) $f(x)$ eine reelle Funktion ist;
- 2) $f(x)$ eine ungerade Funktion, $f(x) = -f(-x)$ ist;
- 3) $f(x)$ eine gerade Funktion, $f(x) = f(-x)$ ist.

c) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten für

- 1) [1 P.] die Funktion $f(x) = x + \pi$, $x \in [-\pi, \pi]$;
- 2) [1 P.] den Stromverlauf $I(\omega t)$ (siehe Fig. links);
- 3) [1 P.] den Spannungsverlauf $U(\omega t)$ (siehe Fig. rechts).

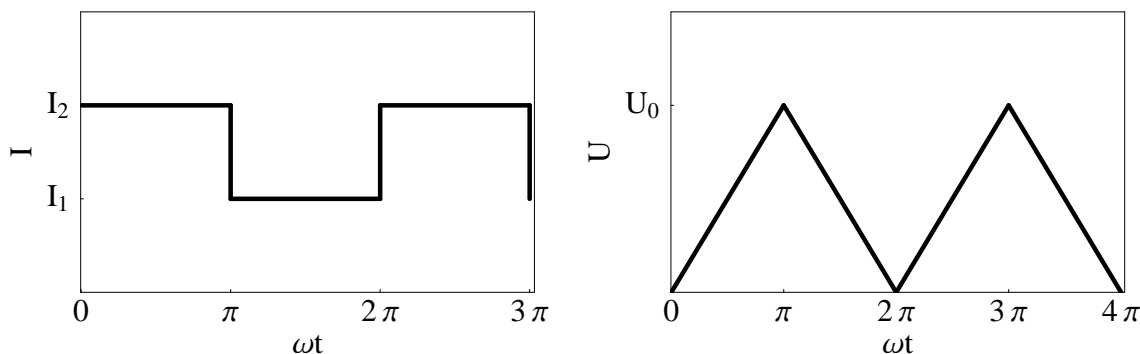
Aufgabe 2: Fourier-Integrale und Fourier-Transformation

Eine Funktion $f(x)$, $-\infty \leq x \leq \infty$ kann durch das Fourierintegral

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} F(k), \quad (4)$$

oder

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x), \quad (5)$$



wobei $F(k)$ die Fouriertransformation der Funktion $f(x)$ ist.

a) [2 P.] Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte der Ableitung der Funktion $f(x)$, $f'(x)$, durch

$$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow ikF(k) \quad (6)$$

gegeben ist. Wie lautet die Fouriertransformierte der zweiten, bzw. der n-ten Ableitung von $f(x)$.

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $F(k)$ für die folgende Funktionen:

1) [1 P.]

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{für } x \geq 0, \\ -e^x, & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (7)$$

2) [1 P.]

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < \pi/2 \text{ und } x > \pi/2, \\ h, & \text{für } -\pi/2 < x < \pi/2 \end{cases} \quad (8)$$

Aufgabe 3: Gauss'sche Glockenkurve

a) [1 P.] Berechnen Sie die Fläche A zwischen der Gauss'sche Glockenkurve $G(x) = e^{-\alpha x^2}$ und der x -Achse,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} \quad \text{mit } \alpha > 0; \quad (9)$$

Hinweis: Berechnen Sie A^2 und stellen Sie A^2 in der Form eines Doppelintegrals dar. Führen Sie dann Polarkoordinaten ein.

b) [2 P.] Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $F(k)$ der normierten Gauss'schen Glockenkurve $f(x)$ und diskutieren Sie das Ergebnis.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\alpha}\right), \quad \text{mit } \alpha > 0. \quad (10)$$

c) [1 P.] Diskutieren Sie den Verlauf der Kurve $f(x)$ im Grenzfall $\alpha \rightarrow 0$.

d) [2 P.] Bestimmen Sie das Integral

$$I = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-x^2/2\alpha} h(x) \quad (11)$$

für eine bei $x = 0$ stetige Funktion $h(x)$.