
Übungsblatt 9: (17 P.) **Abgabe: 02.07.08**

Aufgabe 1: Relativistisches Elektronengas (mündlich)

Für relativistische Elektronen gilt die Beziehung

$$E(k) = cp = c\hbar k \tag{1}$$

Im Folgenden soll die Zustandsgleichung für ein Gas idealer relativistischer Elektronen abgeleitet werden.

a) **[2P.]** Bestimmen Sie die grosskanonische Verteilungsfunktion.

b) **[2P.]** Bestimmen Sie die Fermi-Energie.

c) **[1P.]** Berechnen Sie das grosse Potential.

d) **[1P.]** Zeigen Sie: Es gilt die Relation

$$pV = \frac{1}{3}U \quad . \tag{2}$$

Vergleichen Sie dieses Ergebnis mit der Zustandsgleichung eines Photonengases.

e) **[2P.]** Berechnen Sie die innere Energie.

Hinweis: Approximieren Sie Summen über $\mathbf{k}$ durch Integrale. Berücksichtigen Sie dazu die Relation $E(k) = c\hbar k$.

Aufgabe 2: Variationsverfahren für anharmonischen Oszillator (schriftlich)

Auf Bogoliubov geht ein Verfahren zurück, mit Hilfe dessen sich eine obere Grenze für die freie Energie F eines Systems mit Hamiltonoperator $\hat{H}$ angeben lässt,

$$F \leq F_t + \left\langle \hat{H} - \hat{H}_t \right\rangle_t \quad . \tag{3}$$

$\hat{H}_t$ stellt dabei einen beliebigen „Test-Hamiltonoperator“ dar, für den sich die freie Energie F_t ergibt. Der Mittelwert $\left\langle \hat{A} \right\rangle_t$ ist definiert als

$$\left\langle \hat{A} - \hat{H}_t \right\rangle_t = \frac{\mathrm{Sp}\left(e^{-\beta \hat{H}_t}\left(\hat{A} - \hat{H}_t\right)\right)}{\mathrm{Sp}\left(e^{-\beta \hat{H}_t}\right)} \quad . \tag{4}$$

Wir wollen diesen Zusammenhang nun nutzen, um mit Hilfe eines Variationsverfahrens eine obere Grenze für die freie Energie des Hamiltonoperators eines anharmonischen Oszillators,

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + x^2 + \lambda x^4\right) \quad , \tag{5}$$

zu bestimmen. Als „Test-Hamiltonoperator“ verwenden wir dazu

$$\hat{H}_t(\omega) = \frac{1}{2}\left(-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2 x^2\right) \quad , \tag{6}$$

wobei der Parameter ω frei gewählt werden kann.

a) **[2P.]** Substituieren Sie $\xi = \sqrt{\omega}x$, und drücken Sie $\hat{H}_t$ und $\hat{H} - \hat{H}_t$ durch die in der Quantenmechanik eingeführten Erzeuger und Vernichter aus,

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right) \quad \text{und} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\xi - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right) \quad . \tag{7}$$

b) **[1P.]** Berechnen Sie die freie Energie F_t des „Test-Hamiltonoperators".

c) **[2P.]** Zeigen Sie, dass für den Mittelwert des Operators $\hat{n} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$

$$\langle\hat{n}\rangle_t = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1} =: n(T, \omega) \tag{8}$$

gilt. Berechnen Sie dann

$$\left\langle \hat{H} - \hat{H}_t \right\rangle_t \quad . \tag{9}$$

Hinweis: Es ist hilfreich, zunächst die Beziehung

$$\left\langle \hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a} \right\rangle_t = 2\,(n(T, \omega))^2 \tag{10}$$

zu zeigen und diese dann zu verwenden.

d) **[2P.]** Stellen Sie eine Bestimmungsgleichung für den besten Variationsparameter $\tilde{\omega}$ auf mit

$$\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\left(F_t + \left\langle \hat{H} - \hat{H}_t \right\rangle_t\right)\right)\Big|_{\tilde{\omega}} = 0 \quad . \tag{11}$$

e) **[2P.]** Entwickeln Sie eine Lösung der Gleichung für $T = 0$ und kleine λ.