Übungen zu Statistische Physik I, SoSe 08

Prof. Dr. R. Friedrich

Übungen im WWW: http://pauli.uni-muenster.de/tp/

Übungsblatt 7: (18 P.) **Abgabe: 19.06.08**

Aufgabe 1: Berechnungen von Summen im $\boldsymbol{k}$-Raum (schriftlich)

Betrachten Sie ein Feld in einer Box mit parallelen Wändflächen im Abstand L, das an den Wänden verschwindet und dessen Dynamik durch lineare Gleichungen beschrieben sei.

a) **[1P.]** Warum werden Felder üblicherweise als Superposition von (Raum)-Wellen dargestellt? Welche Wellenvektoren $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ sind zulässig? Wie viele verschiedene Moden $\boldsymbol{k}$ müssen betrachtet werden?

b) **[2P.]** Zeigen Sie zunächst für das eindimensionale Problem mit $k \in \mathbb{R}$, dass die Summe

$$\sum_{k} f(k) \tag{1}$$

für differentierbare Funktionen $f(k)$ und $L \gg 1$ durch das Integral

$$\frac{L}{2\pi} \int \mathrm{d}k \; f(k) \tag{2}$$

angenähert werden kann. Welche Anforderungen sind an f bzw. L zu stellen, damit die Abweichungen von Summation und Integration gering sind?

c) **[1P.]** Zeigen Sie, dass in sich für $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^3$ mit $V := L^3$ analog

$$\sum_{\boldsymbol{k}} f(\boldsymbol{k}) \quad \rightarrow \quad \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\boldsymbol{k} \; f(\boldsymbol{k}) \quad . \tag{3}$$

ergibt. Welchen Zusammenhang erhält man, falls $f(\boldsymbol{k}) = f(|\boldsymbol{k}|)$ gilt?

d) **[1P.]** Ebene Wellen stellen Lösungen des Einteilchen-Problems der (stationären) Schrödingergleichung dar und besitzen eine Energie von

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad . \tag{4}$$

Nehmen Sie in der Lösung von Teil c) die Substitution $k^2 = 2mE/\hbar^2$ vor und führen Sie an geeigneter Stelle die Funktion $h(E) = f\left(\sqrt{2m/(\hbar^2 E)}\right)$ ein.

e) **[2P.]** Im Falle von Fermionen kann jede Mode $\boldsymbol{k}$ nur einfach besetzt werden. In der Vorlesung haben Sie gesehen, dass für $T \to 0$ sämtliche Moden mit $E(\boldsymbol{k}) < \mu = E_F$ besetzt sind. In diesem Falle gilt also $h(E) = \Theta(E_F - E)$.

Begründen Sie, warum sich die mittlere Teilchenzahl $\overline{N}$ ergibt als

$$\overline{N} = \sum_{\substack{\boldsymbol{k} \\ E(\boldsymbol{k}) < E_F}} 1 \quad . \tag{5}$$

Nutzen Sie Ihre Ergebnisse aus der ersten Aufgabenteilen zur Berechnung der Fermi-Energie als Funktion von $\overline{N}$ und V.

Aufgabe 2: Wärmekapazität vom Fermi-Gas für kleine Temperaturen (mündlich)

In Metallen können neben den Gitteratome auch die Elektronen, die fermionischen Charakter haben, Energie aufnehmen und damit zur Wärmekapazität beitragen. Die Wärmekapazität eines solchen „Fermi-Gases“ wollen wir nun untersuchen.

a) **[2P.]** Begründen Sie mit Hilfe des Übergang von Summen im $\boldsymbol{k}$-Raum zu Integralen, der in Aufgabe 1 untersucht worden ist, dass sich die innere Energie eines Elektronengases berechnen lässt als

$$U = A \int_0^\infty dE \, \frac{E^{\frac{3}{2}}}{e^{\beta(E-\mu)} + 1} \quad . \tag{6}$$

Wie ist die Konstante A zu wählen?

b) **[1P.]** Berechnen Sie die innere Energie U für $\beta = 0$.

c) **[4P.]** Berechnen Sie U für kleine T näherungsweise. Betrachten Sie dabei Terme bis zur Ordnung T^3.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass sich der in Gleichung (6) gegebene Ausdruck überführen lässt in das Integral

$$A \int_{-\infty}^\infty dE \, \frac{2}{5} E^{\frac{5}{2}} \beta \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 2 + e^{-\beta(E-\mu)}} \quad . \tag{7}$$

Warum durften wir in dem hier betrachteten Fall die Integration auf das Intervall $[-\infty, \infty]$ ausdehnen? Führen Sie dann eine Substitution $x = \beta\,(E - \mu)$ durch und entwickeln Sie den ersten Teil des Integrals um $x = 0$. Sie können dann

$$\int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \, \frac{x^2}{2} \frac{1}{e^x + 2 + e^{-x}} = \frac{\pi^2}{6} \tag{8}$$

verwenden.

d) **[1P.]** Berechnen Sie die Wärmekapazität für kleine T. Wie unterscheidet sich diese z.B. von der eines idealen Gases? Wie lässt sich das unterschiedliche Verhalten verstehen?

Aufgabe 3: [2P.] Mechanische Energie vom Fermi-Gas (mündlich)

Zeigen Sie, dass für Fermi-Gase, die in einer quadratischen Box mit dem Volumen $V = L^3$ eingeschlossen sind, der Zusammenhang

$$p\,V = B\,U \tag{9}$$

gilt, wobei p, V und U den Druck, das Volumen und die innere Energie darstellen und B eine Konstante ist. Welchen Wert erhalten Sie für B?

Hinweis: Betrachten Sie für die Berechnung des Drucks das großkanonische Potential

$$J(T, V, \mu) = -k_b T \sum_{\boldsymbol{k}} \ln \left(e^{-\beta(E(\boldsymbol{k})-\mu)} + 1 \right) \tag{10}$$

und gehen Sie – wir in Aufgabe 1 beschrieben – von der Summation zur Integration über. U haben Sie in Aufgabe 2a) schon untersucht.

Aufgabe 4: [1P.] Potentialtopf: Zusammenhang zwischen Energie und Volumen (mündlich)

Zeigen Sie, dass für Teilchen in einer quadratischen Box mit dem Volumen V, deren Energie durch (4) gegeben ist, der Zusammenhang

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V} E(k) = -\frac{2}{3} \frac{E(k)}{V} \tag{11}$$

gilt.