Übungsblatt 6: (15 P.) **Abgabe: 12.06.08**

Aufgabe 1: Quantisierung des Lichtefeldes (mündlich)

In der Elektrodynamik ist das Lichtfeld durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben. Weil die Gleichungen linear sind, lassen sich Lösungen der Gleichung als Superposition ebener Wellen darstellen. In Experimenten ist hingegen deutlich geworden, dass Licht auch Teilcheneigenschaften besitzt, die sich im Rahmen der Quantenmechanik untersuchen lassen. Die dafür notwendige Quantisierung des Lichtfeldes wollen wir noch einmal nachvollziehen.

a) **[1P.]** Betrachten Sie eine stehende Welle im Vakuum, die sich z.B. zwischen zwei unendlich ausgedehnten Platten einstellen kann, mit einem elektrischen Feld in z-Richtung,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = p(t)A\sin(kx_1)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{3}} \quad . \tag{1}$$

A soll hier eine Konstante sein, die später festgelegt wird.
Zeigen Sie unter Verwendung der Maxwell-Gleichungen, dass sich für das magnetische Feld unter Einführung einer geeigneten Funktion $q(t)$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x},t) = q(t)\frac{A}{c}\cos(kx_1)\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{2}} \tag{2}$$

ergibt.

b) **[2P.]** Welche Beziehung besteht zwischen den Funktionen p und q? Zeigen Sie, dass die zeitliche Entwicklung dieser Variablen unter Verwendung der Hamiltonfunktion $H = \frac{1}{2}\omega\left(p^2+q^2\right)$ durch die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad \text{und} \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{3}$$

gegeben ist. Wie ist ω hier zu wählen? Wie ist die Konstante A zu wählen, damit H der mittleren Energie des elektrischen Feldes im Vakuum,

$$\bar{U} = \frac{k}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{k}} \mathrm{d}x\ \frac{1}{2}\left(\epsilon_0\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right) \quad , \tag{4}$$

entspricht?

c) **[1P.]** Nach dem Korrespondenzprinzip entsprechen den Variablen der klassischen Mechanik in der Quantenmechanik Operatoren. Sie haben in Teil c) gesehen, dass die Dynamik der Amplituden q und p äquivalent zum harmonischen Oszillator ist. Wie sind q und p zu ersetzten, damit die Hamiltonfunktion in den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{b}^\dagger\hat{b} + \frac{1}{2}\right) \quad \text{mit} \quad [\hat{b},\hat{b}^\dagger] = 1 \tag{5}$$

übergeht? Wie sind die „Erzeuger“ und „Vernichter“ hier zu verstehen?
Hinweis: Greifen Sie auf den quantenmechanischen harmonischen Oszillator zurück, der im letzten Semester behandelt wurde.

d) **[1P.]** Wie groß ist die mittlere „Besetzung“, $\left\langle\hat{b}^\dagger\hat{b}\right\rangle$, bei der Temperatur T?

e) **[1P.]** Geben Sie einen allgemeinen Hamiltonoperator an, der verschiedene, nicht-wechselwirkende Moden k berücksichtigt. Wie „modifiziert“ man diesen Operator üblichweise, um ein Divergieren der Vakuumsenergie zu vermeiden?

Aufgabe 2: Modelle für die Wärmekapazität von Festkörpern (schriftlich)

Betrachten Sie ein System von N unabhängigen, harmonische Oszillatoren mit den Frequenzen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$, die nicht miteinander wechselwirken.

a) **[1P.]** Formulieren Sie den Hamiltonoperator des Gesamtsystems. Verwenden Sie für die jeweiligen Oszillatoren dazu die Auf- und Absteigeoperatoren $\hat{b}_1^\dagger, \hat{b}_2^\dagger, \ldots, \hat{b}_N^\dagger$ bzw. $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \ldots, \hat{b}_N$.

b) **[3P.]** Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme Z, die freie Energie F sowie die innere Energie U.

c) **[1P.]** Berechnen Sie die Wärmekapazität C des Gesamtsystems. Zeigen Sie, dass sich diese überführen lässt in

$$C = \sum_{i=1}^{N} k_b \left(\frac{\hbar\omega_i}{k_b T}\right)^2 \frac{e^{\frac{\hbar\omega_i}{k_b T}}}{\left(e^{\frac{\hbar\omega_i}{k_b T}} - 1\right)^2} \quad . \tag{6}$$

d) **[2P.]** Anfang des letzten Jahrhunderts war die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmekapazität eines Festkörpers noch nicht richtig verstanden. Einstein hat im Jahre 1907 deshalb ein einfaches Modell für eines Festkörpers mit M Atomen vorgeschlagen, das die Schwingungsfreiheitsgrade der Atome durch $3M$ harmonische Oszillatoren derselben Frequenz ω berücksichtigt. Verwenden Sie das Ergebnis aus Teil c), um die Wärmekapazität für Einsteins Modell anzugeben. Zeichnen Sie den funktionalen Verlauf. Was ergibt sich für die Grenzfälle $T \to 0$ und $T \to \infty$? Lässt sich die Wärmekapazität für $T \ll 1$ entwickeln?

e) **[2P.]** Während das Hochtemperaturverhalten durch Einsteins Modell gut beschrieben ist, zeigen sich für kleine Temperaturen deutliche Abweichung zum Experiment; für $T \ll 1$ wird dort ein Verhalten proportional zu T^3 beobachtet.

Im Jahre 1912 erweiterte Debye das Modell, indem er durch Verwendung einer linearen Dispersionsrelation verschiedene Frequenzen ω_i berücksichtigte. Für M Atome werden $3M$ Schwingungen angeregt, deren Frequenzen sich vereinfacht ergeben als

$$\omega_i = \sqrt[3]{\frac{i}{3M}}\omega_D \quad , \tag{7}$$

wobei die Debye-Frequenz ω_D eine Konstante darstellt.

(1) Geben Sie die Wärmekapazität an, die sich unter Verwendung der ω_i ergibt.

(2) Zeigen Sie, dass man für $T \to \infty$ ebenfalls $C = 3Mk_b$ erhält.

(3) Nähern Sie die Wärmekapazität z.B. durch Diskussion der Beiträge der einzelnen Summanden sinnvoll an den Stellen $T_i = \hbar\,(i/3M)^{1/3}\,\omega_D/(2k_b)$ für kleine i. Zeigen Sie so, dass sich für kleine Temperaturen näherungsweise eine Proportionalität der Wärmekapazität zu T^3 ergibt.