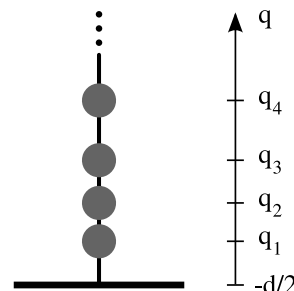


Aufgabe 1: Starre Kugeln unter Wirkung der Gravitation (schriftlich)

Auf einer Stange seien N homogene Kugeln mit dem Durchmesser d und der Masse m so befestigt, dass sie sich reibungsfrei bewegen können. Stöße zwischen den Kugeln sowie mit dem Boden bei $q = -d/2$ seien elastisch. Weil die Kugeln einander nicht durchdringen können, ändert sich ihre Reihenfolge auf der Stange nicht.

Beschreiben Sie das System unter Einwirkung der Erdbeschleunigung g kanonisch.



- a) [3P.] Wie lautet die Hamiltonfunktion des Systems? Verwenden Sie als generalisierte Koordinaten q_i die Schwerpunkte der Kugeln.

Hinweis: Verwenden Sie als Wechselwirkungspotential zweier starrer Kugeln mit dem Durchmesser d und den Schwerpunkten q_i und q_{i+1} mit $q_{i+1} > q_i$

$$V(q_i, q_{i+1}) = \begin{cases} \infty & q_{i+1} - q_i < d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (1)$$

Die elastische Reflektion am Boden lässt sich z.B. durch die Platzierung einer zusätzlichen Kugel an der Stelle $q_0 = -d$ erreichen.

- b) [3P.] Das System stehe nun in Verbindung mit einem Wärmebad der Temperatur T . Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme für den Fall, dass sich die Schwerpunkte der Kugeln im Intervall $[0, \infty]$ bewegen können.

Hinweis: Beachten Sie dabei, dass die Kugeln einander nicht durchdringen können, und lösen Sie die Integrale iterativ.

- c) [1P.] Berechnen Sie die Innere Energie des Systems. Wie groß ist die Ruheenergie es Systems bei $T = 0$?
- d) [3P.] Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Schwerpunkt mindestens einer Kugel im Intervall $[0, x]$ befindet? Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit bei Zimmertemperatur für $x = 1 \text{ mm}$ und

- (1) $N = 1, m = 1 \text{ g}$,
- (2) $N = 1, m = 12 \cdot 1.66 \cdot 10^{-24} \text{ g}$ (Masse eines C^{12} -Atoms) bzw.
- (3) $N = 10^7, m = 12 \cdot 1.66 \cdot 10^{-24} \text{ g}$?

Aufgabe 2: Spur von Operatoren (mündlich)

In der Vorlesung haben Sie die Spur von Operatoren kennengelernt,

$$\text{Sp}(\hat{A}) := \sum_i \langle a_i | \hat{A} | a_i \rangle \quad (2)$$

- a) [2 P.] Zeigen Sie, dass die Spur unabhängig von der Wahl der jeweiligen Basis ist. Zeigen Sie dazu zunächst, dass

$$\text{Sp}(\hat{A}\hat{B}) = \text{Sp}(\hat{B}\hat{A}) \quad (3)$$

gilt.

b) [2 P.] Berechnen Sie für den Hamiltonoperator $\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{n} + \frac{1}{2}\right)$ die Ausdrücke

(1) $\text{Sp} \left(e^{-\beta\hat{H}} \right)$ und

(2) $\text{Sp} \left(e^{-\beta\hat{H}} \hat{H} \right)$

Hinweis: In der Eigenbasis $|i\rangle$ von \hat{H} gilt $\hat{n}|i\rangle = i|i\rangle$.

c) [1 P.] Geben Sie die mittlere Energie eines harmonischen Oszillators als Funktion der Temperatur T an. Wie lautet die mittlere Energie für $T = 0$?

Aufgabe 3: Quantenmechanischer Dichteoperator (mündlich)

Für einen normierten, quantenmechanischen Zustand $|\Phi(t)\rangle = \sum_i c_i(t)|a_i\rangle$ ist der quantenmechanische Dichteoperator $\hat{\rho}(t)$ definiert als

$$\hat{\rho}(t) := |\Phi(t)\rangle\langle\Phi(t)| \quad . \quad (4)$$

Zeigen Sie, dass

a) [1 P.] der quantenmechanische Erwartungswert eines Operators \hat{A} im Zustand $|\Phi(t)\rangle$ mit Hilfe dieses Dichteoperators berechnet werden kann als

$$\langle\Phi(t)|\hat{A}|\Phi(t)\rangle = \text{Sp}(\hat{\rho}(t)\hat{A}) \quad . \quad (5)$$

b) [1 P.] für die Spur des Dichteoperators

$$\text{Sp}(\rho) = 1 \quad (6)$$

gilt.

c) [2 P.] die zeitliche Entwicklung des Dichteoperators durch die Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) = [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (7)$$

gegeben ist. \hat{H} stellt den Hamiltonoperator des Systems dar.

Hinweis: Hier benötigt man die Schrödingergleichung!

Aufgabe 4: [1 P.] Statistischer Dichteoperator (mündlich)

Der statistische Dichteoperator $\hat{\rho}$ ist definiert als

$$\hat{\rho} = \sum_i |a_i\rangle p_i \langle a_i| \quad . \quad (8)$$

Zeigen Sie, dass unter Verwendung dieses Dichteoperators für die Entropie der Zusammenhang

$$S = -k_b \langle \ln \hat{\rho} \rangle = -k_b \sum_i p_i \ln p_i \quad (9)$$

gilt. Wie lauten die Wichte p_i für die kanonische Gesamtheit?