Übungen zu Statistische Physik I, SoSe 08

Prof. Dr. R. Friedrich

Übungen im WWW: http://pauli.uni-muenster.de/tp/

Übungsblatt 4: (22 P.) **Abgabe: 29.05.08**

Aufgabe 1: Maximum Informations-Prinzip und Phasenübergänge (schriftlich)

Wir betrachten ein einfaches Modell für den Phasenübergang zum Ferromagnetismus: Ein Festkörper wird durch seine Magnetisierung m charakterisiert. Die Magnetisierung wird durch die Summe der Spins der s_i der einzelnen Atome bestimmt und ist damit eine schwankende Grösse. Bei hohen Temperaturen sind die Fluktuationen so stark, sodass die mittlere Magnetisierung verschwindet. Auf Grund der Wechselwirkung der Spins kann für tiefe Temperaturen die mittlere Magnetisierung (ohne angelegtes Magnetfeld) einen nichtverschwindenen Wert annehmen.

Im Folgenden soll dieser Phasenübergang mittels des Maximum-Informations-Prinzip behandelt werden. Betrachten Sie dazu die Magnetisierung als eine kontinuierliche Zufallsgrösse.

a) **[1P.]** Wie lautet die kanonische Verteilung unter der Nebenbedingung, dass die *Energie* des Materials durch

$$E(m) = \frac{1}{2}m^2 \tag{1}$$

festgelegt ist.

b) **[1P.]** Berechnen Sie die mittlere innere Energie $U = \frac{1}{2}\langle m^2 \rangle$ als Funktion der Temperatur. Bestimmen Sie die spezifische Wärme c.

Hinweis: Die spezifische Wärme ist gegeben durch

$$c = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right) \quad . \tag{2}$$

c) **[2P.]** In der Nähe eines Phasenüberganges zum ferromagnetischen Zustand reicht die Betrachtung der *Energie* zur Beschreibung nicht mehr aus. Vielmehr müssen die *Schwankungen der Energie*

$$Q(m) = m^4 \tag{3}$$

als zusätzliche Nebenbedingung berücksichtigt werden. Wie lautet die kanonische Verteilung, die man über das Maximum-Informations-Prinzip erhält?

d) **[1P.]** Was können Sie über das Vorzeichnen der Lagrange'schen Parameter aussagen?

Hinweis: Unter welcher Bedingung existiert die Zustandssumme Z?

e) **[2P.]** Bestimmen Sie den wahrscheinlichsten Zustand m_0, d.h. den Zustand m_0, für den die kanonische Wahrscheinlichkeitsdichte maximal wird. Unter welchen Bedingung erhalten Sie einen Zustand $m_0 \neq 0$?

Aufgabe 2: Ideales Gas aus zwei Teilchensorten (mündlich)

Wir betrachten ein Gas, das aus zwei verschiedenen nicht wechselwirkenden Teilchen der Massen m_1 und m_2 besteht. Die Anzahl der verschiedenen Teilchen ist N_1 und N_2.

a) **[1P.]** Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(\beta, V, N_1, N_2)$.

Hinweis: Das infinitesimale Phasenraumvolumen ist durch

$$\frac{1}{N_1! h^{3N_1} N_2! h^{3N_2}} \Pi_{i=1}^{N_1} d\mathbf{q_i} d\mathbf{p_i} \Pi_{j=1}^{N_2} d\tilde{\mathbf{q}}_\mathbf{j} d\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{j} \quad . \tag{4}$$

definiert. Dabei sind die Koordinaten und Impulse der Teilchen mit Masse m_1 mit $\mathbf{q}_i, \mathbf{p}_i$, diejenigen mit Masse m_2 mit $\tilde{\mathbf{q}}_i, \tilde{\mathbf{p}}_i$ bezeichnet.

b) **[1P.]** Berechnen Sie die freie Energie $F(\beta, V, N_1, N_2)$.

c) **[2P.]** Bestimmen Sie die Entropie. Betrachten Sie insbesondere den Fall $m_1 = m_2$. Was würden Sie erhalten, wenn Sie das infinitesimale Phasenraumvolumen durch

$$\frac{1}{h^{3N_1} h^{3N_2}} \Pi_{i=1}^{N_1} d\mathbf{q_i} d\mathbf{p_i} \Pi_{i=1}^{N_2} d\tilde{\mathbf{q}}_\mathbf{j} d\tilde{\mathbf{p}}_\mathbf{j} \tag{5}$$

definiert wäre?

Aufgabe 3: Mischungsentropie (mündlich)

Betrachten Sie zwei *verschiedene* ideale Gase, die aus N_1 bzw. N_2 Teilchen der Massen m_1 bzw. m_2 bestehen. Betrachten Sie den Fall, dass sich das erste Gas im Volumen V_1, das zweite im Volumen V_2 befindet und die Volumina durch eine Trennwand von einander getrennt sind.

a) **[2P.]** Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme für den Fall, dass die beiden Gase getrennt sind.

b) **[1P.]** Bestimmen Sie die kanonische Zustandssumme für den Fall ohne Trennwand.

c) **[2P.]** Berechnen Sie die freie Energie F sowie die innere Energie U für die beiden Fälle .

d) **[2P.]** Berechnen Sie die Gesamt-Entropie für den Fall getrennter Gase.

e) **[1P.]** Berechnen Sie jetzt die Entropie für den Fall, dass die Trennwand entfernt wurde.

f) **[1P.]** Bestimmen Sie die Mischungsentropie.

g) **[2P.]** Welche Mischungsentropie ergibt sich, falls $N_1 = N_2 = N$ und $V_1 = V_2$ gilt? Welche Mischungsentropie erhält man in diesem Fall, wenn zwei *gleiche* Gase mit einander „vermischt" werden und $N \gg 1$ gilt?

   Hinweis: Nach dem „Vermischen" der *gleichen* Gase lassen sich die Teilchen aus den verschiedenen Volumina nicht mehr von einander unterscheiden.