Übungsblatt 1: (15 P.) **Abgabe: 17.04.08**

Aufgabe 1: Eine statistische Methode zur Bestimmung der Zahl π (mündlich) [**3P.**]

In einer Ebene sind parallele Geraden mit dem Abstand d gezeichnet. Wir betrachten eine Nadel der Länge l. Die Nadel wird immer wieder auf die Ebene fallen gelassen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine der Geraden schneidet? Wie können Sie empirisch die Zahl π bestimmen?

Hinweis: Führen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes der Nadel (x, y) sowie den Winkel φ bezüglich der gezeichneten Linien zur Charakterisierung ihrer Orientierung ein.

Aufgabe 2: Zur Normalverteilung (mündlich)

Die Normalverteilung besitzt die Form

$$f(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Q}} e^{-1/2\frac{(q-q_0)^2}{Q}} \tag{1}$$

a) [**2P.**] Berechnen Sie den Mittelwert $< q >$ sowie das zweite Moment $< q^2 >$ und die Varianz

$$\sigma^2 =< q^2 > - < q >^2 \tag{2}$$

b) [**1P.**] Berechnen Sie die charakteristische Funktion $Z(\alpha)$ der Normalverteilung.

c) [**2P.**] Zeigen Sie allgemein: Falls die Verteilung $f(q)$ die charakteristische Funktion $Z(\alpha)$ besitzt, dann besitzt die charakteristische Funktion $\tilde{Z}(\alpha)$ der verschobenen Verteilung $f(q - q_0)$ die Form

$$\tilde{Z}(\alpha) = e^{i\alpha q_0} Z(\alpha) \tag{3}$$

d) [**2P.**] Berechnen Sie über die charakteristische Funktion der Gaussfunktion mit $q_0 = 0$ die Momente bis zur Ordnung 6. Können Sie eine Systematik in der Berechnung der höheren Momente erkennen?

Aufgabe 3: Zur Binomialverteilung: (schriftlich)

Betrachten Sie die Binomialverteilung

$$p_N(N_1) = \binom{N}{N_1} p_1^{N_1} p_2^{N-N_1}.$$

a)**[2P.]** Berechnen Sie die Mittelwerte

$$\langle N_1 \rangle = \sum_{N_1=0}^{N} N_1 p_N(N_1),$$
$$\langle N_1^2 \rangle = \sum_{N_1=0}^{N} N_1^2 p_N(N_1),$$

und damit die mittlere quadratische Schwankung:

$$\overline{\triangle N_1} = \sqrt{\langle N_1^2 \rangle - \langle N_1 \rangle^2}.$$

Was folgt für die relative Schwankung $\frac{\overline{\triangle N_1}}{\langle N_1 \rangle}$ in der Grenze $N \to \infty$?

b) **[1P.]** Es seien $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$. Berechnen Sie $p_N(N_1)$ explizit für $N = 4$.

c)**[2P.]** Es seien $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ und $N = 10^{23}$. Wie großsind $\langle N_1 \rangle$, $\overline{\triangle N_1}$, $\frac{\overline{\triangle N_1}}{\langle N_1 \rangle}$? Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, alle Teilchen im Volumen V_1 anzutreffen $(N_1 = N, N_2 = 0)$.