Übungen zur Statistische Physik I, SoSe 08

Prof. Dr. R. Friedrich

Übungen im WWW: `http://pauli.uni-muenster.de/tp/`

Übungsblatt 2: (16 P.) **Abgabe: 24.04.08**

Aufgabe 1: Stirling'sche Formel [2P.] (mündlich)

Beweisen Sie die Stirling'sche Näherungsformel

$$lnN! \approx N(lnN - 1)$$

Ab welchen Werten von N ist diese Näherung zufriedenstellend erfüllt?

Aufgabe 2: Zum Zentralen Grenzwertsatz (schriftlich)

Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(q) = \begin{cases} 0, & |q| < 1 \\ \frac{1}{2}, & |q| \geq 1. \end{cases}$$

a) **[1P.]** Berechnen Sie Mittelwert und Varianz der Verteilung.

b) **[1P.]** Berechnen Sie die charakteristische Funktion

$$Z(\alpha) = < e^{i\alpha q} > .$$

c) **[2P.]** Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der Kumulanten

$$W(\alpha) = lnZ(\alpha)$$

und berechnen Sie die Kumulanten

$$C_j = \{ \left(\frac{1}{i} \frac{d}{d\alpha} \right)^j W(\alpha) \}_{\alpha=0}$$

d) **[2P.]** Bestimmen Sie jetzt die Verteilung der Grösse

$$x = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} q_i$$

über die Relation

$$f_X(x) = \int dq_1 dq_N \delta(x - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} q_i) f(q_1)...f(q_n)$$

e) **[1P.]** Betrachten Sie explizit den Grenzübergang $N \to \infty$.

Aufgabe 3: Stabile Verteilungen (mündlich)

Betrachten Sie N identische verteilte, statistisch unabhängige Zufallsvariable q mit den symmetrischen Verteilungsfunktionen $f(q)$. Wir definieren die Zufallsvariable

$$x = C_N \sum_{i=1}^{N} q_i.$$

a) **[1P.]** Zeigen Sie: Die charakterische Funktion einer geraden Verteilung $f(q) = f(-q)$ erfüllt die Bedingung

$$Z(\alpha) = Z(-\alpha)$$

b) **[2P.]** Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $f_X(x)$ und daraus die charakterische Funktion

$$Z_x(\alpha) = \int dx f_X(x) e^{i\alpha x}.$$

Welcher Zusammenhang besteht zur charakteristischen Funktion $Z_q(\alpha)$ der Verteilung $f_q(q)$?

c) **[2P.]** Betrachten Sie nun die erzeugende Funktion der Kumulanten $W(\alpha) = lnZ(\alpha)$ für die beiden Verteilungen. Zeigen Sie, dass folgender Zusammenhang besteht:

$$W_X(\alpha) = NW_q(-\alpha C_N).$$

d) **[2P.]** Bestimmen Sie nun Lösungen dieser Gleichung mit

$$W_x(\alpha) = W_q(\alpha) = W(\alpha)$$

Hinweis: Machen Sie den Ansatz

$$W(\alpha) = D|\alpha|^\gamma$$

Welche Bedingung müssen Sie an C_N stellen? Kann γ beliebig gewählt werden?

e) **[2P.]** Betrachten Sie den Fall $\gamma = 1$. Welche Verteilungsfunktion bekommen Sie? Besitzt diese Verteilung ein zweites Moment? Was können Sie allgemein zur Existenz des zweiten Momentes sagen?