

Übungsblatt 1: (15 P.)

Abgabe: 17.04.08

Aufgabe 1: Eine statistische Methode zur Bestimmung der Zahl π (mündlich)
[3P.]

In einer Ebene sind parallele Geraden mit dem Abstand d gezeichnet. Wir betrachten eine Nadel der Länge l . Die Nadel wird immer wieder auf die Ebene fallen gelassen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Nadel eine der Geraden schneidet? Wie können Sie empirisch die Zahl π bestimmen?

Hinweis: Führen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes der Nadel (x, y) sowie den Winkel φ bezüglich der gezeichneten Linien zur Charakterisierung ihrer Orientierung ein.

Aufgabe 2: Zur Normalverteilung (mündlich)

Die Normalverteilung besitzt die Form

$$f(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi Q}} e^{-1/2 \frac{(q-q_0)^2}{Q}} \quad (1)$$

a) [2P.] Berechnen Sie den Mittelwert $\langle q \rangle$ sowie das zweite Moment $\langle q^2 \rangle$ und die Varianz

$$\sigma^2 = \langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 \quad (2)$$

b) [1P.] Berechnen Sie die charakteristische Funktion $Z(\alpha)$ der Normalverteilung.

c) [2P.] Zeigen Sie allgemein: Falls die Verteilung $f(q)$ die charakteristische Funktion $Z(\alpha)$ besitzt, dann besitzt die charakteristische Funktion $\tilde{Z}(\alpha)$ der verschobenen Verteilung $f(q - q_0)$ die Form

$$\tilde{Z}(\alpha) = e^{i\alpha q_0} Z(\alpha) \quad (3)$$

d) [2P.] Berechnen Sie über die charakteristische Funktion der Gaussfunktion mit $q_0 = 0$ die Momente bis zur Ordnung 6. Können Sie eine Systematik

in der Berechnung der höheren Momente erkennen?

Aufgabe 3: Zur Binomialverteilung: (schriftlich)

Betrachten Sie die Binomialverteilung

$$p_N(N_1) = \binom{N}{N_1} p_1^{N_1} p_2^{N-N_1}.$$

a)[2P.] Berechnen Sie die Mittelwerte

$$\langle N_1 \rangle = \sum_{N_1=0}^N p_N(N_1),$$
$$\langle N_1^2 \rangle = \sum_{N_1=0}^N p_N(N_1),$$

und damit die mittlere quadratische Schwankung:

$$\overline{\Delta N_1} = \sqrt{\langle N_1^2 \rangle - \langle N_1 \rangle^2}.$$

Was folgt für die relative Schwankung $\frac{\overline{\Delta N_1}}{\langle N_1 \rangle}$ in der Grenze $N \rightarrow \infty$?

b) [1P.] Es seien $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$. Berechnen Sie $p_N(N_1)$ explizit für $N = 4$.

c)[2P.] Es seien $p_1 = p_2 = \frac{1}{2}$ und $N = 10^{23}$. Wie groß sind $\langle N_1 \rangle$, $\overline{\Delta N_1}$, $\frac{\overline{\Delta N_1}}{\langle N_1 \rangle}$? Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, alle Teilchen im Volumen V_1 anzutreffen ($N_1 = N, N_2 = 0$).