Statistische Physik I, Sommersemerster 2008

Prof. Dr. R. Friedrich

Donnerstag, den 10. Juli 2008

Probeklausur

Allgemeine Hinweise:

- Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner, 4 (handschriftlich) beschriebene „Formelzettel“. Beachten Sie auch die kleine Formelsammlung auf der folgenden Seite.
- Bitte schreiben Sie sauber und deutlich und dokumentieren Sie den von Ihnen gewählten Lösungsweg ausreichend.
- Die Besprechung dieser Probeklausur erfolgt in den nachmittäglichen Übungsgruppen.
- Die Semesterklausur findet am Freitag, dem 18. Juli von 14:00 bis 17:00 Uhr im Hörsaal 1 statt.

Kleine Formelsammung:

- Gauß'sche Normalverteilung (normiert):

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Fourier-Darstellung der Dirac'schen Delta-Funktion:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \; e^{-ikx}$$

- „Ableitung“ der δ-Funktion. Mit Hilfe von partieller Integration gilt:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; f(x) \frac{\partial}{\partial x} \delta(x) = - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x)\right) \delta(x)$$

- „Gauß-Integral“:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \; \exp\left(-ax^2\right) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{mit } a > 0)$$

Aufgabe 1: Exponentialverteilung

Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der Form

$$p(x) = \begin{cases} a \exp(-ax) & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

wird *Exponentialverteilung* genannt.

a) **[1P.]** Zeigen Sie, dass die Verteilung normiert ist.

b) **[1P.]** Berechnen Sie die Momente $\langle x^n \rangle$ als Funktion von a für alle n. Geben Sie den Mittelwert $\langle x \rangle$, das zweite Moment $\langle x^2 \rangle$ und die Varianz σ^2 der Verteilung an.

c) **[1P.]** Was macht eine stabile Verteilung aus? Ist die Verteilung $p(x)$ stabil?

Hinweis: Für die Beantwortung der zweiten Frage können Sie Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil b) verwenden und mit dem zentralen Grenzwertsatz argumentieren.

d) **[2P.]** Die Fouriertransformierte $\phi(k) := \langle e^{ikx} \rangle$ einer Verteilung bezeichnet man *charakteristische Funktion.* Zeigen Sie allgemein, wie sich sämtliche Momente einer Verteilung aus der charakteristischen Funktion berechnen lassen.

Aufgabe 2: Ideales Gas unter Einwirkung der Schwerkraft

Betrachten Sie ein ideales, einatomiges Gas mit N Teilchen der Masse m auf der Grundfläche A unter Einwirkung der Schwerkraft, das sich im Volumen $A \times [0, \infty]$ frei bewegen kann.

a) **[2P.]** Geben Sie die Hamiltonfunktion des Systems an.

b) **[3P.]** Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme $Z(\beta)$, die freie Energie $F(\beta)$ und die innere Energie $U(\beta)$.

c) **[2P.]** Berechnen Sie die Entropie des Gases. Wie ändert sie sich bei einer Erhöhung der Temperatur von T_0 auf T_1?

Aufgabe 3: Ideales zweidimensionales Fermionen-Gas

Untersuchen Sie ein Gas, das aus $N \gg 1$ wechselwirkungsfreien Fermionen der Masse m besteht und sich nur auf einer quadratischen Fläche $A = L \times L$ frei bewegen kann.

a) **[1P.]** Welche Energie besitzt ein Teilchen mit dem Wellenvektor $\boldsymbol{k}$? Welche Werte kann der Wellenvektor $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^2$ hier annehmen?

b) **[2P.]** Bestimmen Sie die Fermi-Energie als Funktion von A und $\bar{N}$. Werten Sie dazu die Summe

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{k} \\ E(\boldsymbol{k}) < E_F}} 1 \tag{2}$$

für $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^2$ für $T = 0$ aus. Erläutern Sie zunächst kurz, warum obiger Ausdruck bei $T = 0$ mit der mittleren Teilchenzahl zusammenhängt.

Hinweis: In den Übungen haben Sie bereits gezeigt, dass sich solche Summen mit Hilfe von Integralen berechnen lassen. Für Summen über die Wellenvektoren $\boldsymbol{k} \in \mathbb{R}^2$ können Sie hier

$$\sum_{\boldsymbol{k}} f(\boldsymbol{k}) = \frac{A}{(2\pi)^2} \int \mathrm{d}\boldsymbol{k} \; f(\boldsymbol{k}) \quad . \tag{3}$$

verwenden.

c) **[1P.]** Zeigen Sie, dass die Besetzungsdichte eines Niveaus der Energie E in einem System mit dem chemischen Potential μ bei der Temperatur T gegeben ist als

$$n(E) = \frac{1}{e^{\beta(E-\mu)} + 1} \quad . \tag{4}$$

d) **[3P.]** Berechnen Sie die innere Energie U des Gases und zeigen Sie, dass hier $J = -U$ gilt, wobei J das großkanonische Potential des Gases ist.

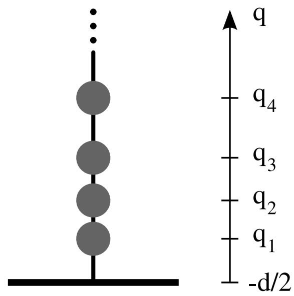
Hinweis: Das großkanonische Potential J können Sie berechnen als

$$J(T, V, \mu) = -k_b T \sum_{\boldsymbol{k}} \ln \left(e^{-\beta(E(\boldsymbol{k})-\mu)} + 1 \right) \quad . \tag{5}$$

Aufgabe 4: Starre Kugeln unter Wirkung der Gravitation

Auf einer Stange seien N homogene Kugeln mit dem Durchmesser d und der Masse m so befestigt, dass sie sich reibungsfrei bewegen können. Stöße zwischen den Kugeln sowie mit dem Boden bei $q = -d/2$ seien elastisch. Weil die Kugeln einander nicht durchdringen können, ändert sich ihre Reihenfolge auf der Stange nicht.

Beschreiben Sie das System unter Einwirkung der Erdbeschleunigung g kanonisch.



a) **[2P.]** Wie lautet die Hamiltonfunktion des Systems? Verwenden Sie als generalisierte Koordinaten q_i die Schwerpunkte der Kugeln.

Hinweis: Verwenden Sie als Wechselwirkungspotential zweier starrer Kugeln mit dem Durchmesser d und den Schwerpunkten q_i und q_{i+1} mit $q_{i+1} > q_i$

$$V(q_i, q_{i+1}) = \begin{cases} \infty & q_{i+1} - q_i < d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad . \tag{6}$$

Die elastische Reflektion am Boden lässt sich z.B. durch die Platzierung einer zusätzlichen Kugel an der Stelle $q_0 = -d$ erreichen.

b) **[3P.]** Das System stehe nun in Verbindung mit einem Wärmebad der Temperatur T. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme für den Fall, dass sich die Schwerpunkte der Kugeln im Intervall $[0, \infty]$ bewegen können.

Hinweis: Beachten Sie dabei, dass die Kugeln einander nicht durchdringen können, und lösen Sie die Integrale iterativ.

c) **[1P.]** Berechnen Sie die Innere Energie des Systems. Wie groß ist die Ruheenergie es Systems bei $T = 0$?

d) **[2P.]** Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich der Schwerpunkt mindestens einer Kugel im Intervall $[0, x]$ befindet?