Statistische Physik I, Sommersemerster 2008

Prof. Dr. R. Friedrich

Freitag, den 18. Juli 2008

Semesterklausur

Auf jeden Fall ausfüllen:

Name, Vorname: ____

Matrikelnummer:________________ Angestrebter Studienabschluss: ______________________

Geburtsdatum:______________________ Geburtsort:______________________________________

Übungsgruppenleiter:____

Aufgabe	Punkte	bearbeitet	nicht bearbeitet	erzielte Punkte
1	7	☐	☐	
2	5	☐	☐	
3	8	☐	☐	
4	7	☐	☐	

Allgemeine Hinweise:

- Zugelassene Hilfsmittel: Taschenrechner, 4 (handschriftlich) beschriebene „Formelzettel“. Beachten Sie auch die kleine Formelsammlung auf der folgenden Seite.
- Bitte schreiben Sie sauber und deutlich und dokumentieren Sie den von Ihnen gewählten Lösungsweg ausreichend.

Viel Erfolg!

Kleine Formelsammung:

- Gauß'sche Normalverteilung (normiert):

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

- Fourier-Darstellung der Dirac'schen Delta-Funktion:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}k \; e^{-ikx}$$

- Nützliches Integral:

$$\int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}k \;\; \cos(kx) e^{-ax} = \frac{a}{a^2 + k^2}$$

Aufgabe 1: Symmetrische Exponentialverteilung (7 Punkte)

Untersuchen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$p(x) = \mathcal{N} e^{-a|x|} \quad . \tag{1}$$

a) **[1P.]** Bestimmen Sie die Normierungskonstante $\mathcal{N}$, sodass $p(x)$ normiert ist.

b) **[1P.]** Berechnen Sie alle Momente $\langle x^n \rangle$ der Verteilung $p(x)$.

c) **[1P.]** Bestimmen Sie die charakteristische Funktion $\phi(k) := \left\langle e^{ikx} \right\rangle$.

d) **[2P.]** Die Verteilung $P(X)$ der Summe $X = x_1 + x_2$ zweier unabhängiger Zufallsvariablen, die der Verteilung $p(x)$ genügen, ergibt sich allgemein als

$$P(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_2 \; \delta(x_1 + x_2 - X) p(x_1) p(x_2) \tag{2}$$

Berechnen Sie die charakteristische Funktion $\Phi(K)$ der Verteilung P und drücken Sie diese durch die charakteristische Funktion $\phi(k)$ der Verteilung p aus. Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis auf Summen von n unabhängigen Zufallsvariablen.

e) **[2P.]** Ist die Verteilung p stabil? Begründen Sie Ihre Antwort durch Nutzung der Ergebnisse aus den Aufgabenteilen c) und d).

Aufgabe 2: Zustandsgleichung des idealen Gases (5 Punkte)

Betrachten Sie ein ideales Gas aus N unabhängigen Teilchen der Masse m in einem Volumen V.

a) **[3P.]** Zeigen Sie, dass für ein kanonisches System mit der Zustandssumme $Z(\beta)$ allgemein der Zusammenhang

$$U = \langle H \rangle = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln \left[Z(\beta) \right] \tag{3}$$

gilt, und berechnen Sie für das hier betrachtete ideale Gas die innere Energie U sowie die Wärmekapazität c_v pro Teilchen.

b) **[2P.]** Geben Sie die freie Energie F an, und zeigen Sie, dass die Zustandsgleichung

$$pV = N k_b T \tag{4}$$

gilt.

Aufgabe 3: Rotationszustände eines linearen Moleküls (8 Punkte)

Als Modell für die Rotationszustände eines Gases von Molekülen, die einen Drehimpuls aufweisen können, betrachten wir ein Ensemble von N unabhängigen, ortsfesten quantenmechanischen Rotatoren mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\hat{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{i}}^{\,2}}{2\Theta} \quad . \tag{5}$$

$\hat{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{i}}$ bezeichnet den Drehimpulsoperator eines Moleküls. Eine vollständige Basis von Eigenfunktionen von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ wird durch die Zustände $|l, m\rangle$ mit $0 \leq l < \infty$ und $-l \leq m \leq l$ aufgespannt. Die Eigenwerte von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ lauten

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 \, |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) \, |l, m\rangle \quad . \tag{6}$$

a) **[2P.]** Geben Sie die kanonische Zustandssumme eines Ensembles von N Rotatoren mit dem Hamiltonoperator $\hat{H}$ an.

b) **[2P.]** Berechnen Sie die innere Energie und Wärmekapazität pro Rotator für $T \gg \frac{\hbar^2}{2k_b\Theta}$.

Hinweis: Falls $C \ll 1$ gilt können Sie die folgende Näherung verwenden:

$$\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\exp\left(-C\,l(l+1)\right) \approx \int\limits_0^{\infty} \mathrm{d}l\ (2l+1)\exp\left(-C\,l(l+1)\right) \tag{7}$$

c) **[3P.]** Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für den quantenmechanischen Fall, den Sie in Aufgabenteil b) untersucht haben, mit der inneren Energie und der Wärmekapazität, die sich aus der klassischen Betrachtung des Modells mit der Hamiltonfunktion

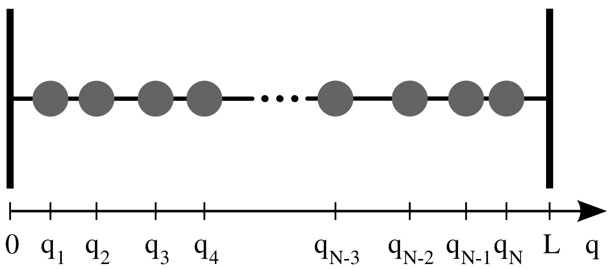
$$H(\phi_1,\ldots,\phi_N,p_1^\phi,\ldots,p_N^\phi,\theta_1,\ldots,\theta_N,p_1^\theta,\ldots,p_N^\theta) = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2\Theta}\left(\left(p_i^\phi\right)^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}\left(p_i^\theta\right)^2\right) \tag{8}$$

ergibt.

d) **[1P.]** Welche Unterschiede ergeben sich für $T \ll \frac{\hbar^2}{2k_bT}$ zwischen der klassischen und der quantenmechanischen Betrachtung des Problems. Diskutieren Sie insbesondere Ihr Ergebnis aus a) und die sich daraus ergebende innere Energie sowie die Wärmekapazität für diesen Fall.

Aufgabe 4: Starre Kugeln auf einer Stange (7 Punkte)

Auf einer Stange seien N homogene Kugeln mit dem Durchmesser d und der Masse m so befestigt, dass sie sich reibungsfrei bewegen können (s. Skizze). Stöße zwischen den Kugeln sowie mit dem Rändern bei 0 und L seien elastisch. Weil die Kugeln einander nicht durchdringen können, ändert sich ihre Reihenfolge auf der Stange nicht.



Beschreiben Sie das System kanonisch.

a) **[1P.]** Wie lautet die Hamiltonfunktion des Systems? Verwenden Sie als generalisierte Koordinaten q_i die Schwerpunkte der Kugeln.

Hinweis: Verwenden Sie als Wechselwirkungspotential zweier starrer Kugeln mit dem Durchmesser d und den Schwerpunkten q_i und q_{i+1} mit $q_{i+1} > q_i$

$$V(q_i,q_{i+1}) = \begin{cases} \infty & q_{i+1}-q_i < d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad . \tag{9}$$

b) **[4P.]** Das System stehe nun in Verbindung mit einem Wärmebad der Temperatur T. Berechnen Sie die kanonische Zustandssumme.

Hinweis: Beachten Sie dabei, dass die Kugeln einander nicht durchdringen können, und lösen Sie die Integrale iterativ.

c) **[2P.]** Berechnen Sie die innere Energie U, die freie Energie F sowie den Druck

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_{T,N} \tag{10}$$

des Systems. Skizzieren Sie die Abhängigkeit des Druckes von $\frac{N}{L}$.