Übungsklausur:

Aufgabe 1:

Beweisen Sie lediglich mit Hilfe der allgemeinen Drehimpulseigenschaften, also ohne die expliziten Matrixdarstellungen der Spinoperatoren für einen Spin $S = \frac{1}{2}$ die folgenden Relationen:

a) $S_x S_y + S_y S_x = 0$;

b) $S_x S_y = i\frac{\hbar}{2} S_z$;

Hinweis: Benutzen Sie die Eigenschaften $\langle S_+ | \frac{1}{2}\rangle = S_- | -\frac{1}{2}\rangle = 0$ sowie $[S_x, S_y] = i\hbar S_z$.

Aufgabe 2:

Betrachten Sie ein Teilchen mit Spin 1/2 in einem konstanten homogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. Beschränken Sie sich auf die Diskussion des Spinfreiheitsgrades, d.h. die Abhängigkeit der Wellenfunktion vom Ort wird nicht betrachtet.

a) Wie lautet die Schrödingergeichung?

b) Bestimmen Sie die Lösungen der Bewegungsgleichungen für die Amplituden c_+ und c_- des Zustandes

$$|\psi(t)\rangle = c_+(t)|\frac{1}{2}\rangle + c_-(t)| - \frac{1}{2}\rangle$$

Hinweis: Benutzen Sie dazu die Matrix-Darstellung des Spinoperators S_z sowie den Ausdruck für die Lamorfrequenz $\omega_L = \frac{g_S \mu_B}{2\hbar} B$.

c) Bestimmen Sie nun die Zeitabhängigkeit des Erwartungswertes der Spinkomponenten S_x, S_y, S_z für $\psi(0) = (a, b)^T, \quad a, b \in \mathbb{R}$.

d) Kommentieren Sie das Ergebniss.

Aufgabe 3:

Betrachten Sie das Wasserstoffatom in einem konstanten Magnetfeld $\mathbf{B}$.

a) Wie lautet die Pauli-Gleichung für das Elektron?

b) Bestimmen Sie die Eigenfunktionen und die Energieeigenwerte in Abhängigheit des Magnetfeldes $\mathbf{B} = Be_z$?

c) Skizzieren Sie schematisch das Energieniveau-Schema und die Energieaufspaltung für s und p Orbitale.

Aufgabe 4:

Benutzen Sie das Ritzsche Variationsverfahren zur Abschätzung der Grundzustandsenergie des linearen harmonischen Oszillators unter Verwendung der Versuchsfunktionenschar ($\boldsymbol{\alpha}$-Variationsparameter)

$$\{\boldsymbol{\varphi}(x, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^+\}.$$

Hinweis: Verwenden Sie die Formeln

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(\boldsymbol{\alpha}^2 + x^2)^2} = \frac{\pi}{4\boldsymbol{\alpha}^3}; \qquad \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(\boldsymbol{\alpha}^2 + x^2)^2} = \frac{\pi}{4\boldsymbol{\alpha}},$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(\boldsymbol{\alpha}^2 + x^2)^3} = \frac{3\pi}{16\boldsymbol{\alpha}^5}; \qquad \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(\boldsymbol{\alpha}^2 + x^2)^4} = \frac{\pi}{32\boldsymbol{\alpha}^5}.$$