

Übungsblatt 8: (13 P.)

Abgabe: 20.12.07

Aufgabe 1:(schriftlich)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich auf einer Kugeloberfläche mit dem Radius R .

a)[2P.] Formulieren Sie den Hamilton-Operator und lösen Sie das ungestörte Eigenwertproblem. Welche Entartung liegt vor?

b)[1P.] Es wirke als Störung das homogene Schwerfeld. Finden Sie eine Observable, die sowohl mit H_0 als auch mit H_1 kommutiert.

c)[1P.] Geben Sie die Eigenzustände zu H_0 an. Benutzen Sie dazu die Überlegungen aus b).

d)[1P.] Berechnen Sie die Energiekorrektur erster Ordnung. Wird die Entartung aufgehoben?

e)[2P.] Was ergibt sich als Energiekorrektur zweiter Ordnung?

Hinweis: Benutzen Sie die Formel

$$\cos \theta Y_{lm_l}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(l+1)^2 - m_l^2}{(2l+1)(2l+3)}} Y_{l+1m_l}(\theta, \varphi) + \sqrt{\frac{l^2 - m_l^2}{(2l+1)(2l-1)}} Y_{l-1m_l}(\theta, \varphi).$$

Aufgabe 2:(mündlich) [3P.]

Der Hamiltonoperator eines anharmonischen linearen Oszillators sei durch

$$H = H_0 + W, \quad H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2, \quad W = \lambda \sqrt{\frac{m^3\omega^5}{\hbar}}x^3 + \mu \frac{m^2\omega^3}{\hbar}x^4$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Eigenwerte $E_n(\lambda, \mu)$ von H .

Hinweis: Nehmen Sie erst an, dass die Lösung des ungestörten Problem bekannt ist. Drücken Sie nun den Operator W durch den Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperator aus.

Aufgabe 3:(mündlich)

Der Hamiltonoperator eines anharmonischen linearen Oszillators sei durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \frac{m^2\omega^3}{10\hbar}x^4$$

gegeben.

a)[**2P.**] Führe das Variationsverfahren unter Verwendung der Versuchsfunktionenschar

$$\{\tilde{u}(x; \alpha) = e^{-\alpha x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+\}$$

(α Variationsparameter) durch.

b)[**1P.**] Vergleiche mit der exakten Grundzustandsenergie $E_0 = 0.559146\hbar\omega$ und kommentiere das Ergebnis.

Hinweis: Verwenden Sie für die Rechnung Einheiten mit $\hbar = m = \omega = 1$. Benutzen Sie auch die Formel

$$\int_0^{+\infty} d\xi \xi^{2n} e^{-\beta\xi^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!\beta^n} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, \quad \beta \in \mathbb{R}^+, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Benutzen Sie auch die Eigenschaft, dass die kubische Gleichung $y^3 + 3py + 2q = 0$ im Falle $p^3 + q^2 > 0$ nur eine reelle Lösung besitzt. Außerdem gilt es für $p < 0$:

$$y = -\frac{2\sqrt{-p}}{\sin 2\psi}, \quad \tan \psi = \sqrt[3]{\tan \frac{\varphi}{2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{-p^3}}{q}, \quad -\frac{\pi}{4} < \psi < \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$