
Übungsblatt 3: (16 P.) **Abgabe: 15.11.07**

Aufgabe 1: Eichtransformation (schriftlich)[2 P.]

Betrachten Sie die Eichtransformation der elektrostatischen Potentiale

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}' + \nabla Q \\ \Phi &= \Phi' - \dot{Q} \end{aligned} \tag{1}$$

sowie die Lösungen der dazugehörigen zeitabhängigen Schrödingergleichungen, $\psi(\mathbf{x}, t)$ und $\psi'(\mathbf{x}, t)$. Beweisen Sie, dass beide Lösungen durch die Transformation

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = e^{iG(\mathbf{x},t)}\psi(\mathbf{x}, t) \tag{2}$$

verknüpft sind. Berechnen Sie dazu explizit den Phasenfaktor $G(\mathbf{x}, t)$.

Aufgabe 2: Rotation eines starren Körpers: Quantenmechanische Behandlung (münlich)

a)[**1P.**] Betrachten Sie die Rotation eines Moleküls um seinen Schwerpunkt, das Sie durch einen starren Körper mit dem Trägheitstensor Θ beschreiben. Bestimmen Sie die Rotationsenergie des Moleküls. Drücken Sie diese durch seinen Drehimpuls aus.

b)[**1P.**] Betrachten Sie zunächst einen symmetrischen starren Körper mit den Hauptträgheitsmomenten $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \Theta_0$. Wie lautet der Hamiltonoperator? Bestimmen Sie die Eigenzustände und die Energieeigenwerte dieses Operators.

c)[**2P.**] Wie entwickelt sich der Anfangszustand

$$|\psi >= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[|1, 1 > +|2, 0 >\Big] \tag{3}$$

wobei die Vektoren $|l, m >$ die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ bezeichnen. Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung des Drehimpulsoperators $< \psi(t)|\mathbf{L}^2|\psi(t) >$.

d)[**1P.**] Betrachten Sie jetzt den Fall $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$. Wie lautet der Hamiltonoperator? Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren.

e)[**1P.**] Wie entwickelt sich der Anfangszustand (3) in diesem Fall? Berechnen Sie die Erwartungswerte $< L_z >$, $< L_z^2 >$, $< \mathbf{L}^2 >$?

f)[**1P.**] Nehmen Sie nun an, dass die Rotation des Moleküls mit einem magnetischen Moment

$$\mu = -g_M \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{L} \tag{4}$$

verknüpft ist. Wie lautet der Hamiltonoperator? Bestimmen Sie das Energiespektrum und die Eigenfunktionen im homogenen Magnetfeld. Skizzieren Sie die Energiniveaus in Abhängigkeit des Magnetfeldes B.

g)[**2P.**] Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung der Erwartunsgwerte $< L_x >$ und $< L_y >$ für Zustände mit der Anfangsbedingung (3) sowie für den allgemeinen Fall $|\psi >= \sum_m c_m |l, m >$.

Hinweis: Verwenden Sie die Leiteropratoren $L_\pm$.

Aufgabe 3: Spin im zeitabhängigen Magnetfeld (schriftlich)

Betrachten Sie ein Teilchen mit Spin 1/2 in einem räumlich konstanten, aber zeitlich veränderlichen Magnetfeld $\mathbf{B} = [B_x(t), 0, B_z]$.

a)[**1P.**] Wie lautet die zeitabhängige Schrödingergleichung?

b)[**2P.**] Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für die Amplituden c_+ und c_- des Zustandes

$$|\psi >= c_+(t)|\frac{1}{2} > + c_-(t)| - \frac{1}{2} > \tag{5}$$

Benützen Sie dazu die Matrix-Darstellungen der Spinoperatoren S_x, S_y, S_z.

c)[**1P.**] Wie lauten die Lösungen für den Fall $B_x = 0$?

d)[**1P.**] Bestimmen Sie die Lösung für den Fall $B_x = B$ (B: zeitlich konstant)