

Übungsblatt 2: (24 P.)

Abgabe: 08.11.07

Aufgabe 1: (mündlich)

Betrachten Sie die Bewegung eines Teilchens im konstanten Magnetfeld

$$\mathbf{B} = [0, 0, b]$$

a)[1 P.] Zeigen Sie, dass ein zugehöriges Vektorpotential die Form

$$\mathbf{A} = [0, bx, 0]$$

besitzt. Verifizieren Sie, dass das Vektorpotential der Coulomb-Eichung genügt.

b)[3P.] Wie lautet die Hamiltonfunktion eines Teilchens der Ladung q , das sich in diesem Potential bewegt. Formulieren Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen und geben Sie die allgemeine Lösung an.

c)[2P.] Bestimmen Sie den Hamiltonoperator durch Anwendung der Jordan'schen Regel.

d)[2P.] Zur Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung kann ein Separationsansatz verwendet werden:

$$\Psi(x, y, z) = \varphi_{\parallel}(z)\varphi_{\perp}(x, y),$$

wobei für die Funktion $\varphi_{\perp}(x, y)$ gilt:

$$\varphi_{\perp}(x, y) = e^{ik_y y} \varphi_x(x), \quad p_y = \hbar k_y.$$

Zeigen Sie: Für die Funktion $\varphi_x(x)$ lautet die Bestimmungsgleichung

$$\left[\frac{\hbar^2 k_y^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar k_y q b}{m} x + \frac{b^2 q^2}{2m} x^2 \right] \varphi_x(x) = E_{\perp} \varphi_x(x) \quad (1)$$

Warum gelingt dieser Separationsansatz?

e)[3P.] Lösen Sie die Eigenwertgleichung (1).

Hinweis: Verwenden Sie die Analogie der Eigenwertgleichung zum harmonischen Oszillator. Bestimmen Sie die Energieeigenwerte.

f)[1P.] Formulieren Sie die vollständige Lösung der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung.

Aufgabe 2: (schriftlich)

Betrachten Sie die Helmholtz-Gleichung

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)u = 0, \quad u = u(x, y, z). \quad (2)$$

a)[1 P.] Zeigen Sie, dass sich die Gleichung (2) in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) in der folgenden Form

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 \rho u = 0 \quad (3)$$

schreiben lässt.

b)[2 P.] Die Gleichung (3) kann mit einem Separationsansatz

$$u(\rho, \varphi, z) = Z(z)\Phi(\varphi)P(\rho)$$

mit Separationskonstanten $-\lambda^2$ und $-n^2$ gelöst werden. Schreiben Sie die resultierenden Gleichungen für die Funktionen $Z(z)$, $\Phi(\varphi)$ und $P(\rho)$ auf.

c)[2 P.] Verifizieren Sie, dass die Gleichung für $P(\rho)$ mit Hilfe des Ansatzes $\xi = \alpha\rho$, $\alpha^2 = k^2 - \lambda^2$ die Form einer Besselschen Differentialgleichung

$$\xi^2 \frac{d^2 P}{d\xi^2} + \xi \frac{dP}{d\xi} + (\xi^2 - n^2)P = 0 \quad (4)$$

besitzt.

Benutzen Sie nun den Ansatz

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^{k+j}, \quad a_0 \neq 0$$

d)[3 P.] Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen gelten:

$$\begin{aligned} (k^2 - n^2)a_0 &= 0 \\ ((k+1)^2 - n^2)a_1 &= 0 \quad \text{und} \\ a_j &= -\frac{a_{j-2}}{(k+j)^2 - n^2}, \quad j \geq 2. \end{aligned}$$

e)[2 P.] Betrachten Sie nun den Fall $k = n$, $a_0 \neq 0$ und $a_1 = 0$. Beweisen Sie, dass der Hauptterm die folgende Form annimmt:

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j a_0 \Gamma(n+1)}{2^{2j} j! \Gamma(n+j+1)},$$

wobei Γ die Gammafunktion ist,

$$\begin{aligned}\Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, & x > 0, \\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x), \\ \Gamma(x) &= (x-1)! & \text{für } x \in \mathbb{Z}_+.\end{aligned}$$

Hinweis: Benützen Sie die Eigenschaft

$$(n+1)(n+2)\cdots(n+j) = \frac{\Gamma(n+j+1)}{\Gamma(n+1)}.$$

f)[1 P.] Schreiben Sie die Lösung der Besselschen Differentialgleichung in Form der Bessel-Funktionen $J_n(\xi) := P(\xi)$ unter Benutzung der Normierung

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}.$$