

Aufgabe 1:

Betrachten Sie die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem Doppel- δ -Potential:

$$V(q) = -V_0\delta(q + q_0) - V_0\delta(q - q_0); \quad V_0 > 0.$$

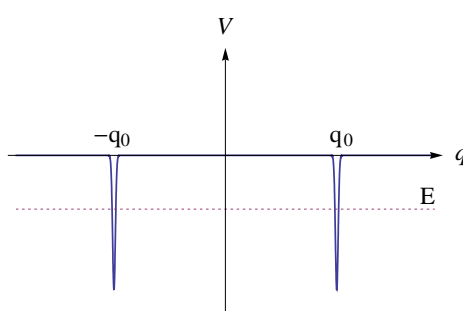


Abbildung 1:

a) [2P.] Integrieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung über ein Intervall $\mp q_0 - \varepsilon < q < \mp q_0 + \varepsilon$ und zeigen Sie, dass die erste Ableitung der Energieeigenfunktion $\psi(q)$ an der Stelle $q = \mp q_0$ einen endlichen Sprung besitzt.

Nehmen Sie an, dass die Wellenfunktion in der Umgebung von $q = \mp q_0$ stetig ist. Benutzen Sie auch die Eigenschaft

$$\int_a^b f(q)\delta(q - q_0) dq = f(q_0), \quad \text{falls } q_0 \in (a, b).$$

b) [3P.] Lösen sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für die gesamte q -Achse.

Hinweis: Formulieren Sie zunächst passende Lösungsansätze der Wellenfunktion $\psi(q)$ für die Bereiche $-\infty < q < -q_0$, $-q_0 < q < q_0$ sowie $q_0 < q < +\infty$. Betrachten Sie unbedingt den Fall von geraden und ungeraden Funktionen $\psi(q)$. Nutzen Sie auch die Normierungsbedingung aus.

2

c) [2P.] Berechnen Sie die Eigenenergien der gebundenen Zustände ($E < 0$).

Hinweis: Nutzen Sie die Unstetigkeitssprünge der ersten Ableitung bei $q = \mp q_0$ aus.

d) [1P.] Diskutieren Sie graphisch die Anzahl der gebundenen Zustände in Abhängigkeit von V_0 .

Aufgabe 2:

a) [2P.] Wie lautet die Hamiltonfunktion $H(p, q)$ des harmonischen Oszillators? Wie lautet der Energiesatz? Welche Bahnkurven gibt es im Phasenraum?

b) [1P.] Wie lautet der Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators? Führen Sie die neue Variable ξ so ein, dass der Hamiltonoperator die Form

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} \left(-\frac{d^2}{d\xi^2} + \xi^2 \right)$$

einnimmt.

c) [1P.] Zeigen Sie, dass der Energieerwartungswert

$$E = \langle \psi(\xi) | H | \psi(\xi) \rangle \geq 0$$

ist.

d) [2P.] Der Vernichtungsoperator ist durch

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \right)$$

definiert. Wie lautet der dazu gehörige adjungierte Operator b^\dagger ? Berechnen Sie explizit den Kommutator

$$[b, b^\dagger] = bb^\dagger - b^\dagger b.$$

e) [1P.] Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator H die Form

$$H = \hbar\omega \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right)$$

besitzt.

- f) [1P.] Beweisen Sie, dass der Operator $b^\dagger b$ selbstadjugiert ist.
- g) [1P.] Wie können Sie die Grundzustandswellenfunktion $|0\rangle$ explizit berechnen? Normieren Sie diese Funktion:

$$\langle 0|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi |\varphi_0|^2 = 1.$$

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\xi^2} = \sqrt{\pi}.$$

- h) [2P.] Skizzieren Sie qualitativ die Eigenfunktionen $\varphi_0(\xi)$, $\varphi_1(\xi)$, $\varphi_2(\xi)$, $\varphi_3(\xi)$.
- i) [2P.] Berechnen Sie die Erwartungswerte von x^2 und p^2 für den Eigenzustand φ_0 bzw. φ_1 . Bestimmen Sie die Unschärfe $\sqrt{\langle 0|x^2|0\rangle \langle 0|p^2|0\rangle}$ bzw. $\sqrt{\langle 1|x^2|1\rangle \langle 1|p^2|1\rangle}$.

Aufgabe 3:

- a) [1P.] Wie lautet der Hamilton-Operator eines freien Teilchens der Masse m im dreidimensionalen Raum?
- b) [2P.] Wie ist der Drehimpulsoperator definiert? Berechnen Sie explizit den Kommutator $[L_x, L_y]$. Was können Sie über die Kommutatoren $[L_i, \mathbf{L}^2]$ aussagen?
- c) [1P.] Formulieren Sie den Hamilton-Operator unter Benützung des Drehimpulsoperators \mathbf{L} in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) .
- d) [1P.] Betrachten Sie jetzt ein Teilchen, das in einer Kugel mit Radius R eingeschlossen ist. Welche Bedingung muss die Wellenfunktion $\psi(r, \theta, \varphi)$ bei $r = R$ erfüllen?
- e) [2P.] Die zeitunabhängige Schrödingergleichung kann mit einem Separationsansatz

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$$

gelöst werden. Wodurch sind die Funktionen $Y(\theta, \varphi)$ festgelegt?

- f) [2P.] Zeigen Sie, dass der radiale Anteil $R(r)$ der Wellenfunktion der Eigenwertgleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} \right] R(r) = ER(r)$$

4

genügt.

g) [**2P.**] Welche Gleichung erhalten Sie mit dem Ansatz

$$R(r) = \frac{u(r)}{r}$$

h) [**3P.**] Betrachten Sie nun Zustände mit Drehimpulsquantenzahl $l = 0$, die der Gleichung

$$-\hbar^2 \frac{d^2}{dr^2} u(r) = E(r)u(r)$$

genügen. Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und die dazugehörigen radialen Anteile der Wellenfunktion $R(r)$.