Aufgabe 1: [10 P.]

Betrachten Sie die Bewegung eines Teilchens im konstanten Magnetfeld

$$\mathbf{B} = [0, 0, b]$$

a)[**1P.**] Zeigen Sie, dass ein zugehöriges Vektorpotential die Form

$$\mathbf{A} = [0, bx, 0]$$

besitzt. Verifizieren Sie, dass das Vektorpotential der Coulomb-Eichung genügt.

b)[**3P.**] Wie lautet die Hamiltonfunktion eines Teilchens der Ladung q, das sich in diesem Potential bewegt. Formulieren Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen und geben Sie die allgemeine Lösung an.

c)[**1P.**] Bestimmen Sie den Hamiltonoperator durch Anwendung der Jordan'schen Regel.

d)[**2P.**] Zur Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung kann ein Separationsansatz verwendet werden:

$$\Psi(x, y, z) = \varphi_{\|}(z)\varphi_{\perp}(x, y),$$

wobei für die Funktion $\varphi_{\perp}(x, y)$ gilt:

$$\varphi_{\perp}(x, y) = e^{ik_y y}\varphi(x), \qquad p_y = \hbar k_y.$$

Zeigen Sie: Für die Funktion $\varphi(x)$ lautet die Bestimmungsgleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\hbar^2 k_y^2}{2m} - \frac{\hbar k_y q b}{m}x + \frac{b^2 q^2}{2m}x^2\right]\varphi(x) = E_{\perp}\varphi(x) \tag{1}$$

e)[**2P.**] Lösen Sie die Eigenwertgleichung (1).

Hinweis: Verwenden Sie die Analogie der Eigenwertgleichung zum harmonischen Oszillator. Bestimmen Sie die Energieeigenwerte.

f)[**1P.**] Formulieren Sie die vollständige Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung.

Aufgabe 2: [8P.]

Betrachten Sie den Gesamtdrehimpuls des Elektrons

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}, \quad (S = \frac{1}{2},\ l \geq 1).$$

Zeigen Sie, dass für die gemeinsamen Eigenzustände $|j,\, m_j\rangle := |l,\, \frac{1}{2}; j,\, m_j\rangle$ der Operatoren $\mathbf{J}^2, J_z, \mathbf{L}^2, \mathbf{S}^2$ gilt:

$$|l \pm \frac{1}{2},\, m_j\rangle = \sqrt{\frac{l \pm m_j + \frac{1}{2}}{2l+1}}|l,\, m_j - \frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\rangle \pm \sqrt{\frac{l \mp m_j + \frac{1}{2}}{2l+1}}|l,\, m_j + \frac{1}{2}\rangle|\frac{1}{2},\, -\frac{1}{2}\rangle, \quad (2)$$

wobei $|l,\, m_l\rangle|\frac{1}{2},\, m_s\rangle$ die Eigenzustände der Operatoren $\mathbf{L}^2, L_z, \mathbf{S}^2, S_z$ sind. Führen Sie dazu die folgenden Schritten aus:

a)**[1P.]** Zeigen Sie, dass für die Quantenzahl j nur die Werte $l + \frac{1}{2}$ und $l - \frac{1}{2}$ möglich sind.

b)**[1P.]** Betrachten Sie zuerst den Zustand $|l + \frac{1}{2},\, m_j\rangle$. Beweisen Sie, dass die Behauptung (2) für $m_j = l + \frac{1}{2}$ korrekt ist.

c)**[1P.]** Mit Hilfe des Leiteroperators J_- überprüfen Sie, dass (2) für $m_j = l - \frac{1}{2}$ gilt.

Hinweis: Benutzen Sie die Formel

$$J_-|j,\, m\rangle = \hbar\sqrt{(j+m)(j-m+1)}|j,\, m-1\rangle.$$

d)**[2P.]** Setzen Sie nun voraus, dass die Formel (2) für m_j korrekt ist und verifizieren Sie (2) für $m_j - 1$.

Hinweis: Benutzen Sie den Leiteroperator J_-.

e)**[1P.]** Untersuchen Sie nun den Zustand $|l - \frac{1}{2},\, m_j\rangle$. Zeigen Sie, dass (2) für den Fall $m_j = l - \frac{1}{2}$ gültig ist.

Hinweis: Die Zustände $|j\, m_j\rangle$ sind orthonormiert.

f)**[2P.]** Nehmen Sie wieder an, dass die Behauptung für m_j korrekt ist und beweisen Sie (2) für $m_j - 1$.

Hinweis: Benutzen Sie den Hinweis zu d).

<u>Aufgabe 3:</u> [6 P.]

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom im homogenen elektrischen Feld

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \mathcal{E}\boldsymbol{e}_z.$$

Dieses Feld soll als Störung W angesehen werden.

a)[**1P.**] Stellen Sie den Hamilton-Operator in Kugelkoordinaten auf.

b)[**3P.**] Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Energiekorrekturen für die zwei niedrigsten Enegieniveaus des Wasserstoffatoms.

<u>Hinweis:</u> Die Lösung des ungestörten Problems kann dabei als bekannt angesehen werden:

$$\begin{aligned}
|nlm\rangle &= R_{nl}(r)Y_l^m(\theta,\varphi),\\
Y_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}},\quad Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta,\quad Y_1^{\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi},\\
R_{10} &= \sqrt{\frac{4}{a_H^3}}e^{-r/a_H},\quad R_{20} = \sqrt{\frac{1}{2a_H^3}}\left(1-\frac{r}{2a_H}\right)e^{-r/2a_H},\quad R_{21} = \sqrt{\frac{1}{24a_H^3}}\frac{r}{a_H}e^{-r/2a_H},\\
E_n^0 &= -\frac{R_H}{n^2},\quad R_H = \frac{\hbar^2}{2\mu a_H^2},\quad a_H = \frac{\hbar^2}{\mu e^2},\quad \mu = \frac{m_e}{1+m_e/m_p}.
\end{aligned}$$

Verwenden Sie auch die Eigenschaft

$$\langle n'\, l'\, m'|W|n\, l\, m\rangle \neq 0 \quad \text{höchstens für} \quad m' = m,\, l' = l \pm 1$$

sowie die Formel

$$\int_0^{+\infty} d\rho\, \rho^n e^{-\rho} = n!, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

c)[**2P.**] Zeichnen Sie die in erster Ordnung Störungstheorie die erhaltenen Energien für eine vorgegebene elektrische Feldstärke $\mathcal{E}$. Welche Aufspaltung zum Übergang $n = 2 \rightarrow n = 1$ ergibt sich somit in einem schwachen elektrischen Feld?

Aufgabe 4: [**6P.**]

Der Hamiltonoperator des anharmonischen linearen Oszillators sei durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \frac{m^2\omega^3}{10\hbar}x^4$$

gegeben. Mittels des Variationsverfahrens von Rayleigh-Ritz soll die Grundzustandenergie nährungsweise berechnet werden.

a)[**1P.**] Benutzen Sie den Ansatz

$$\{u(x;\alpha) = \sqrt{N}e^{-\alpha x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+\}$$

für die Versuchsfunktionenschar. Bestimmen Sie zuerst die Normierungskonstante N.

b)[**2P.**] Berechnen Sie nun das Energiefunktional
$E(\alpha) := \langle H \rangle_u$.

c)[**1P.**] Für welches $\alpha = \alpha_{min}$ wird $E(\alpha)$ minimal?

d)[**2P.**] Bestimmen Sie die minimale Energie $E(\alpha_{min})$. Vergleichen Sie mit der exakten Grundzustandenergie $E_0 = 0.559146\hbar\omega$ und kommentieren Sie das Ergebnis.

Hinweis: Verwenden Sie für die Rechnung Einheiten mit $\hbar = m = \omega = 1$. Benutzen Sie auch die Formel

$$\int_0^{+\infty} d\xi\, \xi^{2n} e^{-\beta\xi^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!\beta^n}\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, \quad \beta \in \mathbb{R}^+, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Benutzen Sie auch die Eigenschaft, dass die kubische Gleichung $y^3 + 3py + 2q = 0$ im Falle $p^3 + q^2 > 0$ nur eine reelle Lösung besitzt. Außerdem gilt es für $p < 0$:

$$y = -\frac{2\sqrt{-p}}{\sin 2\psi}, \quad \tan\psi = \sqrt[3]{\tan\frac{\varphi}{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{-p^3}}{q}, \quad -\frac{\pi}{4} < \psi < \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$