

Übungsblatt 4: (18 P.)

Abgabe: 22.11.07

Aufgabe 1: Stern-Gerlach-Versuch (mündlich)

a)[1P.] Betrachten Sie ein Neutron in einem inhomogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = B(0, 0, z)$. Formulieren Sie die Pauli-Gleichung.

Hinweis: Es besteht folgender Zusammenhang zwischen magnetischen Moment μ_n des Neutrons und dessen Spin \mathbf{S} :

$$\boldsymbol{\mu}_n = g_n \frac{\mu_N}{\hbar} \mathbf{S},$$

wobei $g_n = -3.82608546 \pm 9 \cdot 10^{-6}$ und $\mu_N := \frac{e\hbar}{2m_p}$ das Kernmoment ist, m_p ist die Ruhemasse des Protons.

b)[1P.] Wie lauten die Schrödinger-Gleichungen für die beiden Spinkomponenten $\psi_{\pm}(\mathbf{x}, t)$ der Wellenfunktion $|\psi(\mathbf{x}, t)\rangle$?

c)[2P.] Ein Separationsansatz führt auf die Schrödingergleichung

$$i\hbar\dot{\tilde{\psi}}_{\pm} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tilde{\psi}_{\pm} \mp g_n \frac{\mu_N}{2} Bz \tilde{\psi}_{\pm} \quad (1)$$

Bestimmen Sie erst diesen Separationsansatz. Interpretieren Sie die Gleichung (1).

d)[3P.] Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung der Erwartungswerte

$$Z_{\pm} = \langle \tilde{\psi}_{\pm} | z | \tilde{\psi}_{\pm} \rangle \quad \text{und} \quad P_{\pm} = \langle \tilde{\psi}_{\pm} | \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial z} | \tilde{\psi}_{\pm} \rangle.$$

Berechnen Sie dazu explizit unter Berücksichtigung der Schrödingergleichung für $\tilde{\psi}_{\pm}$ die Größen \dot{Z}_{\pm} und \dot{P}_{\pm} . Welche Bewegung wird dadurch beschrieben?

Hinweis: Für einen beliebigen zeitunabhängigen Operator A gilt:

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle.$$

Beweisen Sie diese Relation.

e)[1P.] Diskutieren Sie qualitativ die Bewegung von Wellenpaketen.

Aufgabe 2: (mündlich)

Betrachten Sie das Wasserstoffatom bzw. ein Alkaliatom in einem konstanten Magnetfeld \mathbf{B} .

a)[1P.] Wie lautet die Pauli-Gleichung für das Elektron?

b)[2P.] Bestimmen Sie die Eigenfunktionen und die Energieeigenwerte in Abhängigkeit des Magnetfeldes $\mathbf{B} = B e_z$?

c)[2P.] Skizzieren Sie schematisch das Energieniveau-Schema und die Energieaufspaltung für s und p Orbitale.

Aufgabe 3: Pauli-Matrizen (schriftlich)

a)[2P.] Zeigen Sie, dass folgende Relationen gültig sind

$$[\sigma_j, \sigma_k] = 2i\epsilon_{jkl}\sigma_l. \quad (2)$$

Berechnen Sie dazu explizit z.B.

$$\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_1 \quad (3)$$

durch Matrizenmultiplikation.

b)[1P.] Verifizieren Sie, dass

$$\sigma_j\sigma_j = \mathbf{1}, \quad j = 1, 2, 3.$$

c)[1P.] Beweisen Sie, dass

$$\begin{aligned} \sigma_1\sigma_2 &= i\sigma_3 \\ \sigma_2\sigma_3 &= i\sigma_1 \\ \sigma_3\sigma_1 &= i\sigma_2. \end{aligned}$$

d)[1P.] Zeigen Sie, dass

$$\sigma_j\sigma_k + \sigma_k\sigma_j = 2\delta_{kj}$$