Aufgabe 1: Stern-Gerlach Experiment [8 P.]

Betrachten Sie ein neutrales Teilchen mit Spin 1/2 (z. B. ein Neuton) in einem inhomogenen Magnetfeld $\mathbf{B} = b(-x, 0, z)$.

a)[**1 P.**] Wie lautet der Hamilton-Operator des Neutrons?

Hinweis: Es besteht folgender Zusammenhang zwischen magnetischen Moment $\boldsymbol{\mu}_n$ des Neutrons und dessen Spin $\mathbf{S}$:

$$\boldsymbol{\mu}_n = g_n \frac{\mu_N}{\hbar} \mathbf{S},$$

wobei $g_n = -3.82608546 \pm 9 \cdot 10^{-6}$ und $\mu_N := \frac{e\hbar}{2m_p}$ das Kernmoment ist, m_p ist die Ruhemasse des Protons.

b)[**1 P.**] Formulieren Sie die Pauli-Gleichung.

c)[**1 P.**] Betrachten Sie nun den Fall $x = 0$. Wie lauten die Schrödinger-Gleichungen für die Spinkomponenten $\psi_\pm(\mathbf{x}, t)$?

d)[**2 P.**] Ein Separationsansatz führt auf die Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar\dot{\varphi}_\pm = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\varphi_\pm \mp g_n \frac{\mu_N}{2} bz\varphi_\pm \tag{1}$$

Bestimmen Sie erst diesen Separationsansatz. Interpretieren Sie die Gleichung (1).

e)[**3 P.**] Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung der Erwartungswerte

$$Z_\pm := \langle\varphi_\pm|z|\varphi_\pm\rangle \quad \text{und} \quad P_\pm := \langle\varphi_\pm|\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial z}|\varphi_\pm\rangle.$$

Welche Bewegung wird dadurch beschrieben?

Hinweis: Benutzen Sie das Ehrenfest'sche Theorem.

Aufgabe 2: Spin-Bahn-Kopplung [12 P.]

Betrachten Sie zwei Drehimpulse $\mathbf{J}_1$ und $\mathbf{J}_2$, die zu einem Gesamtdrehimpuls $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ koppeln ($j_1 = j_2 = 1$).

a)**[2 P.]** Wie lautet eine Basis des Produkraumes $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$?

b)**[2 P.]** Bestimmen Sie den Eigenvektor $|2, 1, 1, 2\rangle$ zu den Operatoren $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}_1^2$, $\mathbf{J}_2^2$, J_z.

c)**[2 P.]** Berechnen Sie die restlichen Eigenvektoren des Quintetts aus dem Unterraum $\mathcal{H}(j = 2)$ durch sukzessive Anwendung des Leiteroperators J_-.

d)**[1 P.]** Bestimmen Sie den Eigenvektor $|1, 1, 1, 1\rangle$.

Hinweis: Dieser Eigenvektor muss zu $|2, 1, 1, 1\rangle$ orthogonal sein.

e)**[2 P.]** Bestimmen Sie nun die beiden fehlenden Eigenvektoren des Tripletts aus dem Unterraum $\mathcal{H}(j = 1)$ durch sukzessive Anwendung des Operators J_-.

f)**[1 P.]** Berechnen Sie den Eigenvektor $|0, 1, 1, 0\rangle$ aus der Bedingung, dass er zu allen anderen Eigenvektoren $|j, 1, 1, m\rangle$ orthogonal ist.

g)**[2 P.]** Bestimmen Sie nun die Energieeigenwerte zum Hamiltonoperator

$$H = a\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2 + \mu(J_{1z} + J_{2z}).$$

Aufgabe 3: Störungstheorie: Verschobener linearer Oszillator [7 P.]

Der Hamiltonoperator des „verschobenen" linearen harmonischen Oscillators besitzt die Form

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - \gamma\sqrt{2m\hbar\omega^3}\,x$$

(γ dimensionslose reelle Konstante).

a)[**2 P.**] Wie lauten die exakten Eigenwerte $E_n(\gamma)$ und die exakten Eigenvektoren $|\psi_n(\gamma)\rangle$ von H?

Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Lösung des Eigenwertproblems von „ungestörten" Oszillator bekannt ist. Benutzen Sie die Formeln:

$$H_0 = \big(b^\dagger b + \frac{1}{2}\big)\hbar\omega, \qquad E_n = \big(n + \frac{1}{2}\big)\hbar\omega, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

$$\psi_n = \sqrt{\frac{\alpha}{2^n n!\sqrt{\pi}}}\exp\big(-\frac{(\alpha x)^2}{2}\big)H_n(\alpha x), \quad \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}.$$

b)[**1 P.**] Zeichnen Sie den Potentialverlauf und die Energieeigenwerte für den „ungestörten" Oszillator mit dem Potential $V(x) = m\omega^2x^2/2$ und für den „verschobenen" Oszillator mit dem Potential $U(x,\gamma) = m\omega^2x^2/2 - \gamma\sqrt{2m\hbar\omega^3}\,x$.

c)[**1 P.**] Für welche Werte des Parameters γ ist die Konvergenz einer störungstheoretischen Entwicklung für $E_n(\gamma)$ zu erwarten, wenn man $H_1 = -\gamma\sqrt{2m\hbar\omega^3}\,x$ als „Störung" ansieht?

d)[**3 P.**] Führen Sie die Berechnung der Eigenwerte $E_n(\gamma)$ von

$$H = H_0 + H_1, \qquad H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 \qquad H_1 = -\gamma\sqrt{2m\hbar\omega^3}\,x$$

in erster und zweiter Ordnung Störungstheorie durch.

Hinweis: Drücken Sie den Operator H_1 durch den Erzeugungsoperator $b^\dagger$ bzw. den Vernichtungsoperator b aus. Benutzen Sie die Formeln

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(b^\dagger + b), \quad p = i\frac{m\hbar\omega}{2}(b^\dagger - b),$$

$$b|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad b^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

<u>Aufgabe 4:</u> Rayleigh-Ritz'sches Variationsverfahren [7 P.]

Betrachten Sie das Energieeigenwertproblem beim Wasserstoffatom mit Drehimpulsquantenzahl $l = 0$.

a)**[1P.]** Geben Sie den Hamiltonoperator in Kugelkoordinaten an.

b)**[1P.]** Benützen Sie den Ansatz

$$\{R(r) = \sqrt{N}e^{-r/\rho},\ \rho > 0\}$$

für die Versuchsfunktionenschar. Bestimmen Sie zuerst die Normierungskonstante N.

<u>Hinweis:</u> Die niedrigste Kugelflächenfunktion Y_{00} ist duch

$$Y_{00} = (4\pi)^{-1/2}$$

gegeben.

c)**[2P.]** Berechnen Sie anschliessend den Erwartungswert

$$< \psi(r)|H|\psi(r) >= E(\rho) \tag{2}$$

als Funktion von ρ.

d)**[1P.]** Für welches $\rho = \rho_{min}$ wird $E(\rho)$ minimal?

e)**[2P.]** Bestimmen Sie die minimale Energie $E(\rho_{min})$. Wie gross ist die Rydbergkonstante?

<u>Hinweis:</u> Es gilt folgende Relation

$$\int_0^\infty drr^m e^{-ar} = \frac{m!}{a^{m+1}}.$$