Singulare Näherungsmethoden

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Seminar zur Theorie der Atome, Kerne und kondensierten Materie
BSc Physik, WS 2013/14

Katharina Garner
20.03.2014

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Häufig können nichtlineare Differentialgleichungen mit der normalen Störungstheorie nicht zufriedenstellend gelöst werden. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn die gefundene Näherung nicht für den gesamten Wertebereich der jeweiligen Variable gültig ist. Der Fehler der Näherung ist dann teilweise sehr groß. Um den Gültigkeitsbereich der Näherung zu vergrößern werden neue Methoden, die singularen Näherungsmethoden, benötigt. Drei davon, die Renormierung, die Lighthillmethode und das multiple time scaling, werden in dieser Ausarbeitung vorgestellt.

2 Einführung des Begriffs der Uniformität

Treten in der Näherung der Lösung einer nichtlinearen Differentialgleichung (DGl.) sogenannte *säkulare Terme* auf, d.h. Terme die nicht beschränkt sind, so gilt diese Näherung nur auf einem bestimmten Intervall. Man sagt auch die Näherung ist nicht *uniform*, denn für eine uniforme Näherung $\bar{x}(t)$ der Funktion $x(t)$ gilt

$$x(\epsilon, t) = \bar{x}(\epsilon, t) + E(\epsilon, t), \quad t_0 \leq t < \infty, \tag{2.1}$$

wobei der Fehler $\lim\limits_{\epsilon \to 0} E(\epsilon, t) = 0$ uniform auf dem Intervall $[t_0, \infty)$ ist. Das heißt mit anderen Worten, dass für ein gegebenes $\delta > 0$ ein von t unabhängiges $\eta > 0$ existiert, sodass

$$|\epsilon| < \eta \to |E(\epsilon, t)| < \delta \tag{2.2}$$

gilt (vlg. [1]).
Es wird immer eine uniforme Lösung einer nichtlinearen Differentialgleichung angestrebt. Lässt sich für ein Problem mit der normalen Störungstheorie keine uniforme Näherung finden, so spricht man von einem *singularen Näherungsproblem*.

Beispiel 1: Führt man für die Funktion

$$x(\epsilon, t) = e^{-\epsilon t} \qquad 0 \leq t \tag{2.3}$$

eine Taylorentwicklung durch, so ergibt sich

$$x(\epsilon, t) = 1 - \epsilon t + \frac{1}{2}\epsilon^2 t^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3). \tag{2.4}$$

Alle Terme (den ersten ausgeschlossen) dieser Näherung streben für große t gegen unendlich, das heißt der Fehler $E(\epsilon, t)$ nimmt zu. Demnach handelt es sich hier um ein Beispiel für eine nicht-uniforme Näherung. In Abb. 1 sind die Funktion $x(\epsilon, t) = e^{-\epsilon t}$ und ihre Taylorentwicklung für verschiedene ϵ dargestellt. Es fällt auf, dass die Näherung bereits für $t = 20$ sehr stark von der exakten Lösung abweicht.

Im weiteren Verlauf werden nun drei Methoden beschrieben, welche uniforme Näherungen liefern, wenn die normale Störungstheorie versagt.

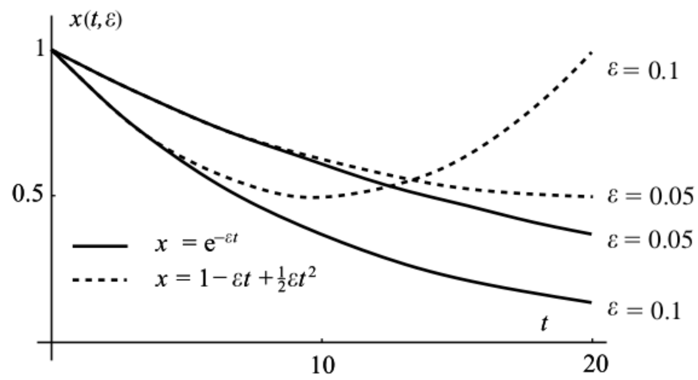

Abbildung 1 – Vergleich der exakten Lösung $x(\epsilon, t) = e^{-\epsilon t}$ mit der Taylorentwicklung für $\epsilon = 0.1$ und $\epsilon = 0.05$ [1]

3 Singulare Näherungsmethoden

3.1 Die Renormierung

Bei der Lindstedt Methode wird angenommen, dass die gesuchte Funktion eine Periode von $\frac{2\pi}{\omega}$ besitzt. Die dort eingeführte Störungsvariable t lässt sich umformen zu

$$t = \tau/\omega = \tau/(1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \mathcal{O}(\epsilon^2)) = \tau(1 + \epsilon\tau_1 + \epsilon^2\tau_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)),$$

wobei es sich bei τ_i um konstante Koeffizienten handelt.
Die Renormierung wird angewendet, wenn das Verhalten der Funktion unbekannt ist. Dann können keine Aussagen über die Periodizität getroffen werden und die konstanten Koeffizienten τ_i werden durch Funktionen $T(\epsilon, t)$ ersetzt. Es ergibt sich

$$t = T(\epsilon, \tau) = \tau + \epsilon T_1(\tau) + \epsilon^2 T_2(\tau) + \mathcal{O}(\epsilon^3). \tag{3.1}$$

Außerdem gilt wie bei der Lindstedt Methode, dass die Funktion $x(\epsilon, t)$ sich in eine Taylorreihe

$$x(\epsilon, t) = X(\epsilon, \tau) = X_0(\tau) + \epsilon X_1(\tau) + \epsilon^2 X_2(\tau) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \tag{3.2}$$

entwickeln lässt.

Beispiel 2: Nun soll mit Hilfe der Renormierung die DGl.

$$\ddot{x} + x = \epsilon x^3 \tag{3.3}$$

gelöst werden. Die Randbedingungen seien $x(\epsilon, 0) = 1$ und $\dot{x}(\epsilon, 0) = 0$.

1. Einsetzen der Reihenentwicklung für $x(\epsilon, t)$ in die DGl. und Aufstellen des Gleichungssystems für x_i
Setzt man Gl. (3.2) in Gl. (3.3) ein und vernachlässigt alle Terme mit der Abhängigkeit ϵ^2, so erhält man

$$\ddot{x_0} + \epsilon\ddot{x_1} + x_0 + \epsilon x_1 = \epsilon x_0^3. \tag{3.4}$$

Durch Koeffizientenvergleich ergeben sich die ersten zwei Gleichungen des Gleichungssystems für x_i mit den jeweiligen Randbedingungen zu

$$\begin{array}{lll} \ddot{x_0} + x_0 = 0, & x_0(0) = 1, & \dot{x_0}(0) = 0; \\ \ddot{x_1} + x_1 = x_0^3, & x_1(0) = 0, & \dot{x_1}(0) = 0. \end{array}$$

2. Lösen des Gleichungssystems und Aufstellen der Lösung für $x(\epsilon, t)$
Löst man dieses Gleichungssystem, so erhält man

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos(t), \\ x_1 &= \frac{1}{32}\cos(t) + \frac{1}{8}t\sin(t) - \frac{1}{32}\cos(3t). \end{aligned}$$

Setzt man diese Lösungen nun in Gl. (3.2) ein, so erhält man

$$x(\epsilon, t) = \cos(t) + \epsilon\left(\frac{1}{32}\cos(t) + \frac{3}{8}t\sin(t) - \frac{1}{32}\cos(3t)\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.5}$$

3. Einsetzten der Reihenentwicklung für t und Eliminieren des säkularen Terms durch geeignete Wahl der Funktionen T_i
Setzt man nun Gl. (3.1) in Gl. (3.5) ein und entwickelt die einzelnen Terme nach ϵ so erhält man

$$X(\epsilon, \tau) = \cos(\tau) + \epsilon\left(\frac{1}{32}\cos(\tau) - T_1\sin(\tau) + \frac{3}{8}\tau\sin(\tau) - \frac{1}{32}\cos(3\tau)\right).$$

Hier sieht man, dass für eine uniforme Näherung von $x(\epsilon, t)$ der Term $\frac{3}{8}\tau\sin(\tau)$ eliminiert werden muss, denn dieser ist unbeschränkt für große t. Dies lässt sich erreichen, indem man

$$T_1 = \frac{3}{8}\tau \tag{3.6}$$

wählt. So wird Gl. (3.1) zu

$$X(\epsilon, t) = \cos(\tau) + \frac{1}{32}\epsilon(\cos(\tau) - \cos(3\tau)). \tag{3.7}$$

In Abb. 2 ist diese Näherungslösung für $\epsilon = \frac{1}{4}$ im Vergleich zur numerisch berechneten Lösung der DGl. (3.3) dargestellt. Vergleicht man den Fehler der mit der Renormierung bestimmten Näherungslösung in Abb. 2 mit der über die Taylorentwicklung bestimmten Näherungslösung in Abb. 1, so sieht man, dass letzterer schon bei kleinen t deutlich größer ist als ersterer. Erst bei $t = 50$ ist eine minimale Abweichung der mit der Renormierung bestimmten Näherungslösung von der numerisch berechneten Lösung zu erkennen.

Die Renormierung liefert demnach in diesem Fall eine uniforme Näherung durch Ausnutzen der Gl. (3.1) und Gl. (3.2) und geschickte Wahl der Funktionen T_i.

3.2 Die Lighthillmethode

Beispiel 3 Die Lighthillmethode soll hier direkt an einem Beispiel demonstriert werden. In diesem Beispiel wird die DGl.

$$(\epsilon x + t)\dot{x} + (2 + t)x = 0, \tag{3.8}$$

welche auch als *Lighthill-Gleichung* bezeichnet wird, auf dem Intervall $0 \leq t \leq 1$ betrachtet. Die Randbedingung sei $x(\epsilon, 1) = e^{-1}$.

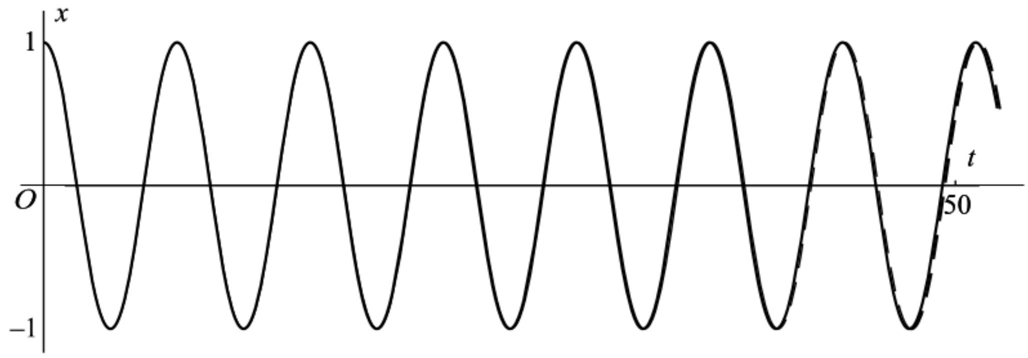

Abbildung 2 – Vergleich der numerischen berechneten und der mit der Renormierung bestimmeten Lösung für die DGl. $\ddot{x} + x = \frac{1}{4}x^3$ [1]

1. Einführen der Variablen τ^* und Bestimmung ihrer Entwicklungskoeffizienten
Zunächst wird die Randbedingung auf die Reihenentwicklung von t aus Gl. (3.1) angewendet und angenommen, dass mit $t = 1$ ein $\tau^*(\epsilon)$ korrespondiert

$$1 = \tau^* + \epsilon T_1(\tau^*) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.9}$$

Dieses τ^* lässt sich gemäß

$$\tau^* = 1 + \epsilon\tau_1 + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{3.10}$$

in eine Taylorentwicklung mit den Koeffizienten τ_i entwickeln. Dabei wird für kleine ϵ angenommen, dass $\tau^*(\epsilon) \approx 1$ gilt.
Im Folgenden sollen nun die Koeffizienten τ_i bestimmt werden. Der Koeffizient τ_1 wird bestimmt, indem man T_1 taylorentwickelt

$$T_1(\tau^*) = T_1(1) + \epsilon\tau_1 T_1'(1) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{3.11}$$

in Gl. (3.9) einsetzt

$$1 = 1 + \epsilon(\tau_1 + T_1(1)) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{3.12}$$

und einen Koeffizientenvergleich durchführt. Es ergibt sich, dass $\tau_1 = -T_1(1)$ womit

$$\tau^* = 1 - \epsilon T_1(1) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{3.13}$$

folgt. Für die anderen Koeffizienten τ_i verfährt man äquivalent.

2. Taylorentwickeln der Koeffizienten X_i und entsprechendes Transformieren von Randbedingung und Ableitung der DGl.
Da die Koeffizienten X_i von τ^* abhängen, können auch sie nach ϵ taylorentwickelt werden. Setzt man diese Taylorentwicklungen in die Randbedingung $x(\epsilon, 1) = e^{-1}$ ein, so ergibt sich

$$e^{-1} = X_0(1) + \epsilon(X_1(1) - X_0'(1)T_1(1)) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{3.14}$$

mit Hilfe dessen man durch Koeffizientenvergleich die Randbedingungen für X_0 und X_1

$$X_0(1) = e^{-1}, \tag{3.15}$$
$$X_1(1) = X_0' T_1(1) \tag{3.16}$$

erhält.
Nun muss das Differential in der DGl. entsprechend transformiert werden. Dies ergibt mit Gl. (3.1) und Gl. (3.2)

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}T} = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}\tau} / \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}\tau} = \frac{X_0' + \epsilon X_1' + \mathcal{O}(\epsilon^2)}{1 + \epsilon T_1' + \mathcal{O}(\epsilon^2)} = X_0' + \epsilon(X_1' - X_0'T_1') + \mathcal{O}(\epsilon^2). \tag{3.17}$$

Dabei wurden im letzten Schritt die einzelnen Summanden nach ϵ taylorentwickelt.
Einsetzen des transformierten Differentials und der Reihenentwicklungen für die Koeffizienten X_i in die DGl. (3.8) ergibt die transformierte DGl.

$$(\epsilon X_0 + \tau + \epsilon T_1)(X_0' + \epsilon\{X_1' - X_0'T_1'\}) + (2 + \tau + T_1)(X_0 + \epsilon X_1) = 0 \tag{3.18}$$

$$\tau X_0' + X_0(2 + \tau) + \epsilon\,[X_0 X_0' + \tau\{X_1' - X_0'T_1'\} + T_1 X_0' + 2X_1] = 0. \tag{3.19}$$

3. Aufstellen und Lösen des Gleichungssystems
Wie bei der Renormierung kann nun ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Koeffizienten X_i aufgestellt werden. Hier werden die ersten beiden Gleichungen des Systems aufgeführt

$$\tau X_0' + (2 + \tau)X_0 = 0, \tag{3.20}$$

$$\tau X_1' + (2 + \tau)X_1 = -T_1(X_0' + X_0) + \tau X_0'T_1' - X_0 X_0'. \tag{3.21}$$

Die Lösung für X_0 ergibt sich mit der Randbedingung aus Gl. (3.15) folglich zu

$$X_0(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{\tau^2}. \tag{3.22}$$

Einsetzen dieser Lösung in Gl. (3.21) des Gleichungssystems ergibt

$$\tau X_1' + (2 + \tau)X_1 = \frac{2e^{-\tau}}{\tau^3}T_1 - e^{-\tau}\left(\frac{2}{\tau^2} - \frac{1}{\tau}\right)T_1' + e^{-2\tau}\left(\frac{2}{\tau^5} - \frac{1}{\tau^4}\right). \tag{3.23}$$

4. Eliminieren des Terms mit der größten Singularität durch geeignete Wahl von T_1
Man stellt fest, dass in Gl. (3.23) alle Terme singular sind, für kleine τ also gegen unendlich streben. Die größte Singularität liegt bei dem Term vor, welcher proportional zu τ^{-5} ist, weshalb dieser im Folgenden eliminiert wird.
Dazu wird zunächst die Annahme gemacht, dass τ sehr klein ist, wodurch die Näherung $e^{-\tau}, e^{-2\tau} \approx 1$ durchgeführt werden kann. Damit der Term mit der größten Singularität verschwindet muss T_1 folgende Gleichung erfüllen

$$\frac{2}{\tau^3}T_1 - \frac{2}{\tau^2}T_1' + \frac{2}{\tau^5} = 0. \tag{3.24}$$

Daraus folgt, dass $T_1(\tau) = -\frac{1}{3}\tau^2$ gelten muss.
Setzt man das Ergebnis für T_1 nun in Gl. (3.23) ein, so kann aus dieser X_1 bestimmt werden. Einsetzen der Lösungen für X_0 aus Gl. (3.22) und X_1 in die Reihenentwicklung für $x(\epsilon, t)$ aus Gl. (3.2) ergibt schließlich eine approximative Lösung für $X(\epsilon, \tau)$

$$X(\epsilon, \tau) \approx X_0(\tau) + \epsilon X_1(\tau) = \frac{e^{-\tau}}{\tau^2}, \tag{3.25}$$

wobei

$$t = \tau - \frac{\epsilon}{3\tau^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \tag{3.26}$$

gilt.
Hier sieht man, dass selbst für $t = 0$ keine unendliche Lösung auftaucht, da $\tau(t = 0) = (\frac{\epsilon}{3})^{1/3}$ und $x(t = 0) \approx (\frac{\epsilon}{3})^{-2/3}$. Ist eine Näherung gesucht, die noch exakter ist, so müssen weitere Koeffizienten X_i mit $i > 1$ auf die gleiche Weise bestimmt werden, wie es hier für X_0 und X_1 geschehen ist.

Letztendlich ist die Lighthillmethode der Renormierung insofern sehr ähnlich, als dass bei beiden davon ausgegangen wird, dass die Störungsvariable als auch die gesuchte Funktion in eine Reihe entwickelt werden können. Bei beiden Methoden wird ein Gleichungssystem aufgestellt, und durch die geschickte Wahl der Koeffizienten T_i der säkulare Term eliminiert. Im Unterschied zur Renormierung benutzt die Lighthillmethode jedoch die Randbedingung als Ausgangspunkt und geht davon aus, dass sich das bei diesem t vorliegenden τ^* in eine Reihe entwickeln lässt, wodurch die Randbedingung und die DGl. transformiert werden müssen.

3.3 multiple time scaling

Die Methode des multiple time scaling wird angewendet, wenn die Renormierung und die Lighthillmethode keine zufriedenstellende Lösung liefern, mit diesen Methoden also keine uniforme Näherung zu finden ist. Mit dem multiple time scaling ist es möglich den Bereich auf dem die Näherung gültig ist zu vergrößern.

Beispiel 4 Um die Methode zu demonstrieren, wird eine DGl. der Form

$$\ddot{x} + \epsilon x + x = 0 \tag{3.27}$$

mit den Randbedingungen

$$x(0, \epsilon) = 1 \quad \dot{x}(0, \epsilon) = 0 \tag{3.28}$$

betrachtet, wobei die Ergebnisse dieser Betrachtung zum Großteil auf alle Funktionen der Form

$$\ddot{x} + \epsilon h(x, \dot{x}) + x = 0 \tag{3.29}$$

angewandt werden können.
Setzt man in die DGl. (3.27) direkt die Reihenentwicklung für $x(\epsilon, t)$ aus Gl. (3.2) ein, und bestimmt die einzelnen Koeffizienten, wie in den vorherigen beiden Abschnitten oder taylorentwickelt die exakte Lösung $x(\epsilon, t) = \cos\left[(1 + \epsilon)^{\frac{1}{2}} t\right]$, erhält man letztendlich

$$x(\epsilon, t) = \cos(t) - \frac{1}{2}\epsilon t \sin(t) + \frac{1}{8}\epsilon^2 (t \sin(t) - t^2 \cos(t)) + O(\epsilon^2). \tag{3.30}$$

Hier sieht man deutlich, dass auf Grund der Abhängigkeiten ϵt und $\epsilon^2 t^2$ die letzten Terme nur für $\epsilon t \ll 1$ nicht säkular sind. Daraus folgt, dass ϵ für große t kleiner gewählt werden muss, es also kein festes ϵ gibt, was für alle t gilt. Folglich wird eine neue Methode benötigt, das multiple time scaling.

1. Einführen einer neuen Variablen η und entsprechendes Transformieren der DGl.
Zunächst muss eine Einschränkung des Wertebereichs vorgenommen werden, für den die

Näherung gültig sein soll. Hier soll sie bis $t = \mathcal{O}(\epsilon^{-1})$ gültig sein. Darauf aufbauend wird eine neue Variable η, die *langsame Zeit*, eingeführt, für die

$$\eta = \epsilon t = \mathcal{O}(1) \tag{3.31}$$

gilt. Gesucht wird nun eine Lösung $x(\epsilon, t) = X(\epsilon, \eta, t)$, die sowohl von ϵ und t als auch von η abhängt und sich wiederum gemäß

$$\begin{aligned} x(\epsilon, t) &= X(\epsilon, \eta, t) & (3.32)\\ &= X_0(\epsilon, \eta, t) + \epsilon X_1(\epsilon, \eta, t) + \epsilon^2 X_2(\epsilon, \eta, t) + \mathcal{O}(\epsilon^3) & (3.33) \end{aligned}$$

in eine Reihe entwickeln lässt. Um das Auftreten von säkularen Termen wie in Gl. (3.30) zu vermeiden, wird für die Koeffizienten X_i die Bedingung

$$X_i = \mathcal{O}(1) \tag{3.34}$$

aufgestellt.
Nun müssen die Differentiale entsprechend der neuen Variablen transformiert werden und man erhält

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} X(t, \epsilon t, \epsilon) = \frac{\partial X}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial X}{\partial \eta}, & (3.35)\\ \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} &= \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 X}{\partial \eta \partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 X}{\partial \eta^2}. & (3.36) \end{aligned}$$

Setzt man dies in die DGl. (3.27) ein so erhält man die transformierte DGl.

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 X}{\partial t \partial \eta} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 X}{\epsilon \eta^2} + (1 + \epsilon) X = 0. \tag{3.37}$$

2. Aufstellen des Gleichungssystems
Setzt man anschließend die Reihenentwicklung für $X(\epsilon, t, \eta)$ aus Gl. (3.33) in die transformierte DGl. (3.37) ein, so können über einen Koeffizientenverleich die folgenden drei ersten Gleichung des Gleichungssystems gefunden werden

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X_0}{\partial t^2} + X_0 &= 0, & (3.38)\\ \frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} + X_1 &= -2\frac{\partial^2 X_0}{\partial t \partial \eta} - X_0, & (3.39)\\ \frac{\partial^2 X_2}{\partial t^2} + X_2 &= -2\frac{\partial^2 X_1}{\partial t \partial \eta} - X_1 - \frac{\partial_0^X}{\partial \eta^2}. & (3.40) \end{aligned}$$

3. Aufstellen der zugehörigen Randbedingungen
Die Randbedingungen aus Gl. (3.28) transformieren sich unter Beachtung von Gl. (3.35) zu

$$X(0, 0, \epsilon) = 1, \quad \frac{\partial X}{\partial t}(0, 0, \epsilon) + \epsilon \frac{\partial X}{\partial \eta}(0, 0, \epsilon) = 0, \tag{3.41}$$

wodurch sich die Randbedingungen der Koeffizienten X_i zu

$$\begin{aligned} X_0(0, 0) &= 1, \quad \frac{\partial X_0}{\partial t}(0, 0) = 0, & (3.42)\\ X_1(0, 0) &= 0, \quad \frac{\partial X_1}{\partial t}(0, 0) + X_0^\eta(0, 0) = 0, & (3.43)\\ X_2(0, 0) &= 0, \quad \frac{\partial X_2}{\partial t}(0, 0) + X_1^\eta(0, 0) = 0 & (3.44) \end{aligned}$$

ergeben.

4. Lösen der DGl. für X_0, sodass $X_0 = \mathcal{O}(1)$
Die allgemeine Lösung der DGl. für X_0 ergibt sich direkt zu

$$X_0(t,\eta) = a_0(\eta)\cos(t) + b_0(\eta)\sin(t) \tag{3.45}$$

mit den Funktionen $a_0(\eta)$ und $b_0(\eta)$. Diese müssen so gewählt werden, dass die Randbedingung aus Gl. (3.42) für X_0 erfüllen ist, was für

$$a_0(0) = 1 \quad \text{und} \quad b_0(0) = 0 \tag{3.46}$$

der Fall ist. Setzt man die Lösung für X_0 aus Gl. (3.45) in Gl. (3.39) ein, so erhält man

$$\frac{\partial^2 X_2}{\partial^2 t} + X_1 = (2a_0' - b_0)\sin(t) - (2b_0' + a_0)\cot(t). \tag{3.47}$$

Die rechte Seite in Gl. (3.47) muss gleich Null sein, denn sonst treten im Ergebnis Terme proportional zu $t\sin(t)$ oder $t\cos(t)$ auf und die Lösung kann die Bedingung in Gl. (3.34) nicht erfüllen. Beachtet man dies, so ergeben sich folgende Bedingungen für die Funktionen a_0 und b_0

$$2a_0' - b_0 = 0 \quad \text{und} \quad 2b_0' + a_0 = 0. \tag{3.48}$$

Daraus folgt mit Gl. (3.46)

$$a_0(\eta) = \cos\left(\frac{1}{2}\eta\right), \quad b_0(\eta) = -\sin\left(\frac{1}{2}\eta\right) \tag{3.49}$$

und mit Gl. (3.45)

$$X_0(\eta,t) = \cos\left(\frac{1}{2}\eta\right)\cos(t) - \sin\left(\frac{1}{2}\eta\right)\sin(t) = \cos\left(t + \frac{1}{2}\eta\right). \tag{3.50}$$

5. Lösen der DGl. für X_1, sodass $X_1 = \mathcal{O}(1)$
Verfährt man mit der Gl. (3.39) ebenso wie mit Gl. (3.38), beachtet die Bedingung, dass die rechte Seite von Gl. (3.40) gleich Null sein muss ebenso wie die Randbedingungen aus Gl. (3.44), so ergibt sich letztendlich

$$X_1(\eta,t) = \frac{1}{8}\eta\sin\left(t + \frac{1}{2}\eta\right). \tag{3.51}$$

6. Einsetzen der Lösungen für X_0 und X_1 in die Reihenentwicklung für $x(\epsilon,t)$
Zu guter Letzt erhält man also mit Gl. (3.31), Gl. (3.50) und Gl. (3.51) die Lösung

$$\begin{aligned} x(\epsilon,t) &= X(\epsilon,\eta,t) = X_0(\epsilon t,t) + \epsilon X_1(\epsilon t,t) + O(\epsilon^2) && (3.52)\\ &= \cos(t + \frac{1}{2}\epsilon t) + \frac{1}{8}\epsilon^2 t\sin(t+\epsilon t) && (3.53)\end{aligned}$$

für die DGl. (3.27).

4 Zusammenfassung

Nicht immer lassen sich mit der normalen Störungstheorie uniforme Lösungen nichtlinearer Gleichungen finden. Deshalb werden die sogenannten singularen Näherungsmethoden verwendet. In dieser Ausarbeitung wurden drei dieser Methoden vorgestellt. Die Renormierung und die Lighthillmethode liefern uniforme Lösungen und basieren auf der Reihenentwicklung der Störungsvariable und der geschickten Wahl der Koeffizienten dieser Reihenentwicklung zur Elimination von säkularen Termen. Mit dem multiple time scaling kann der Gültigkeitsbereich einer Näherung lediglich ausgedehnt werden. Es wird eine Grenze des Gültigkeitsbereichs festgelegt und darauf aufbauend die Variable der langsamen Zeit eingeführt, mit der man zusätzliche Freiheitsgerade erhält um säkulare Terme zu eliminieren.

Literatur

[1] D.W.Jordan/P. Smith, *Nonlinear ordinary equations*. New York: Oxford University Press inc, 2007, S.183-198