



Seminar zur Theorie der Atome, Kerne und kondensierten Materie
Wintersemester 2013/14

Streuprozesse in der Quantenmechanik und Bornsche Reihe

vorgelegt von:
Sophie Christiane Bienhaus,
Daniela Bongartz

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	1
2	Einführung in die quantenmechanischen Streuexperimente.....	1
2.1	Aufbau eines Streuexperiments.....	1
2.2	Wirkungsquerschnitt.....	2
2.3	Streuung einer ebenen Welle.....	3
2.3.1	Differentieller Wirkungsquerschnitt.....	3
2.3.2	Identische Teilchen.....	3
2.3.3	Reduktion des Zwei-Teilchen-Problems.....	4
2.4	Streuung eines Wellenpakets.....	5
2.4.1	Randbedingungen des Streuproblems.....	5
2.4.2	Lösung des Streuproblems mit der Schrödinger-Gleichung.....	5
3	Berechnung der Streuamplitude.....	8
3.1	Integralform der Schrödinger-Gleichung.....	8
3.2	Integralform für die Streuamplitude.....	10
3.3	Erste Bornsche Näherung.....	11
3.4	Die Bornsche Reihe.....	12
3.5	Zwei Beispiele.....	15
3.5.1	Yukawa-Potential.....	15
3.5.2	Coulomb-Potential.....	16
4	Fazit.....	17
5	Literaturverzeichnis.....	18
6	Anhang.....	19
6.1	Anhang zu Kapitel 2.3.1.....	19
6.2	Anhang zu Kapitel 2.3.3:.....	19
6.3	Anhang zu Kapitel 2.4.2.....	20
6.4	Anhang zu Kapitel 3.1.....	20
6.5	Anhang zu Kapitel 3.5.2.....	21

1 Einleitung

Streuexperimente sind physikalisch von hoher Bedeutung, da durch Streuexperimente die Wechselwirkung von Teilchen mit Materie oder anderen Teilchen untersucht werden und daraus Teilchen- bzw. Materialeigenschaften abgeleitet werden können.

Zu berücksichtigen ist die Unterscheidung zwischen elastischen Streuprozessen, bei denen die Teilchen und deren inneren Zustände sich durch die Streuung nicht ändern, sondern dieselben sind, und inelastischen Streuprozessen. Durch z.B. Anregung, Produktion oder Vernichtung von Teilchen unterscheiden sich hier Anfangs- und Endzustand. Im weiteren Verlauf sollen nur elastische Streuprozesse betrachtet werden, so dass die Schrödinger-Gleichungen angewendet werden können!

Weiter wird zwischen exklusiven und inklusiven Streuexperimenten differenziert. Experimente, bei denen nur einige Teilchen im Endzustand analysiert werden, nennt man inklusiv; bei denen hingegen alle Teilchen zentral sind exklusiv.

Im zweiten Kapitel sollen nun quantenmechanische Streuexperimente und deren theoretischen Grundlagen eingeführt werden, um dann im dritten Kapitel die Streuamplitude als wichtige Größe näher zu behandeln und schließlich mit Einführung der Bornschen Näherung zu lösen.

2 Einführung in die quantenmechanischen Streuexperimente

Im Folgenden sollen die Grundlagen der quantenmechanischen Streuprozesse betrachtet werden.

2.1 Aufbau eines Streuexperiments

Aus Abbildung 1 lässt sich entnehmen, wie der experimentelle Aufbau eines Streuexperiments schematisch dargestellt werden kann.

Es sollten nachstehende Forderungen hierbei berücksichtigt und erfüllt [1]:

1. $l, d \gg \lambda$: möglichst kleine Impulsunschärfe; mit λ =de-Broglie-Wellenlänge.
2. $l, d \gg a$: das Target muss von den Teilchen vollständig „gesehen“ werden.
3. $D \gg a, \lambda$: um „freie“ Teilchen betrachten zu können, müssen die Teilchen außerhalb des Wechselwirkungsbereichs betrachtet werden können.
4. $\sqrt{\lambda D} \ll l, d$: das Wellenpaket soll nicht merklich zerfließen.

5. $D \sin \theta \gg d$: der Strahl darf nicht direkt auf den Detektor gerichtet sein, da er diesen meist zerstört.
6. Ausreichende Luminosität.

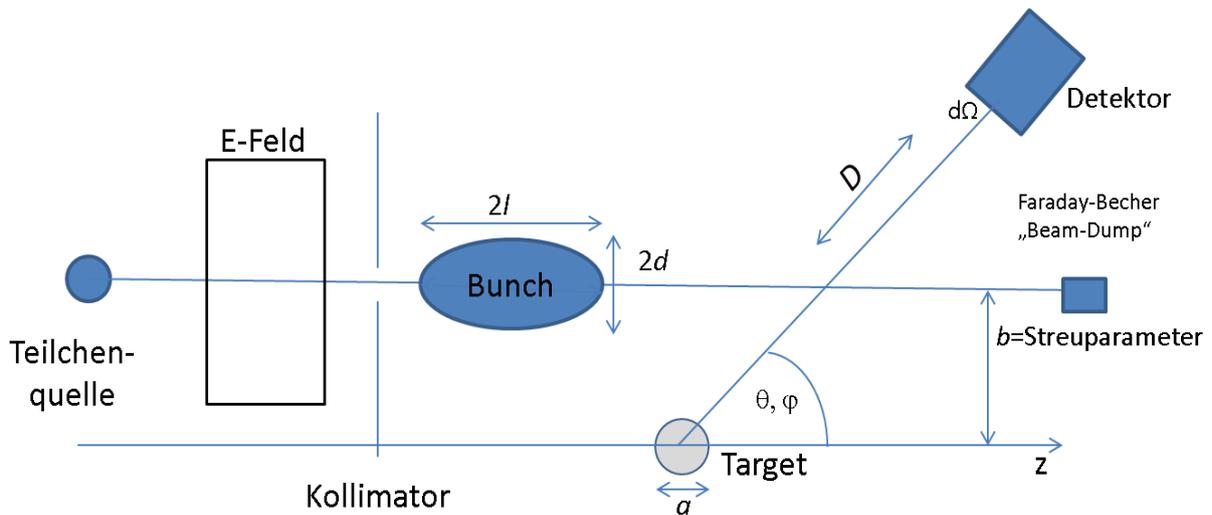


Abbildung 1: Schematischer Aufbau eines Streuexperiments [1]

Im weiteren Verlauf sollen Streupotentiale mit endlicher Reichweite betrachtet werden, d.h. die schneller als $1/r$ abfallen.

2.2 Wirkungsquerschnitt

Der Wirkungsquerschnitt ist wie folgt definiert:

$$d\sigma = \frac{\text{Teilchen in } d\Omega \text{ pro Sekunde}}{\text{einlaufende Teilchen pro Sekunde und cm}^2} \quad (2.1)$$

und besitzt so die Einheit einer Fläche. Das Barn ($1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2$) ist eine Einheit, die an die üblichen Größenverhältnisse angepasst ist und so gerne genutzt wird.

Durch \vec{J}_{ein} , den einlaufenden -, und \vec{J}_{streu} , den auslaufenden Teilchenstrom lässt sich der Wirkungsquerschnitt auch darstellen als

$$d\sigma = \frac{(\vec{J}_{\text{streu}})_r}{(\vec{J}_{\text{ein}})_z} r^2 d\Omega \quad (2.2)$$

mit den Indizes r für die Radial- und z für die z -Komponente.

2.3 Streuung einer ebenen Welle

Nun soll zuerst die Streuung einer ebenen Welle $\psi = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ theoretisch behandelt werden.

2.3.1 Differentieller Wirkungsquerschnitt

Die allgemeine Schrödinger-Gleichung mit ψ als Lösung ergibt für den Teilchenstrom:

$$\vec{j} = \frac{i\hbar}{2m} [(\nabla\psi^*)\psi - \psi^*(\nabla\psi)] \quad (2.3)$$

Setzt man in (2.3) den Ausdruck $\psi = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ für die ebene Welle ein, berechnet sich der einlaufenden Teilchenstrom \vec{j}_{ein} zu:

$$\vec{j}_{ein} = \frac{i\hbar}{2m} [-i\vec{k}e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}i\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}] = \frac{i\hbar}{2m} [-i\vec{k} - i\vec{k}] = \frac{\hbar\vec{k}}{m} = \frac{\vec{p}}{m} = \vec{v} \quad (2.4)$$

Es wird angenommen, dass eine auslaufende Kugelwelle $\psi = \frac{e^{ikr}}{r} f(E, \theta, \varphi)$ die gestreute Welle darstellt, wobei die Größe $f(E, \theta, \varphi)$ als Streuamplitude bezeichnet wird. Die Streuamplitude ist von der Energie der einlaufenden Teilchen (elastische Streuung!) und den Streuwinkeln θ und φ abhängig.

Der Streuteilchenstrom lässt sich mit (2.3) als

$$(\vec{j}_{streu})_r = \frac{v}{r^2} |f(E, \theta, \varphi)|^2 \quad (2.5)$$

schreiben¹.

Durch Einsetzen von (2.4) und (2.5) in (2.2) erhält man den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(E, \theta, \varphi) = \frac{v|f(E, \theta, \varphi)|^2 r^2}{r^2 v} = |f(E, \theta, \varphi)|^2 \quad (2.6)$$

Bei der Bestimmung des differentiellen Wirkungsquerschnitts wurden jedoch

- die Eigenschaften der Teilchenpakete nicht berücksichtigt.
- die Zeitentwicklung nicht beachtet.
- Interferenz der ein- und auslaufenden Welle vernachlässigt.

Deshalb soll im Folgenden genauer darauf eingegangen werden.

2.3.2 Identische Teilchen

In der Quantenmechanik treten Interferenzerscheinungen zwischen ein- und auslaufenden Wellen auf, da es sich bei der Streuamplitude um eine Größe handelt, bei der Real- und

¹ Die ausführlichere Darstellung der Umformung befindet sich im Anhang auf S. 19.

Imaginärteil nicht unabhängig sind. Exemplarisch kann dies an der Streuung von identischen Teilchen verdeutlicht werden.

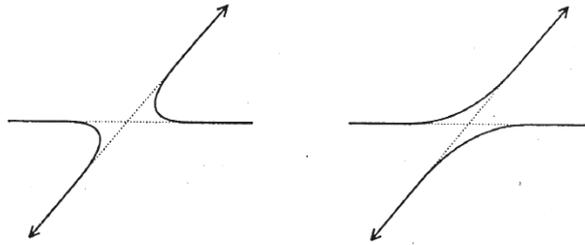


Abbildung 2: Mögliche Trajektorien bei der Streuung [1]

Da man im quantenmechanischen Bereich bei der Streuung identischer Teilchen die beiden Möglichkeiten in Abbildung 2 nicht unterscheiden kann, tritt der Interferenzterm beim Streuquerschnitt auf:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 = |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 + 2\text{Re}(f^*(\theta)f(\pi - \theta)) \quad (2.7)$$

2.3.3 Reduktion des Zwei-Teilchen-Problems

Mit Hilfe des Hamilton-Operators ist es möglich, translationsinvariante Zwei-Teilchen-Probleme auf effektive Ein-Teilchen-Probleme zu reduzieren.

Seien $\vec{x}_{1,2}$ die Orts-, $\vec{p}_{1,2}$ die Impulskoordinaten und $m_{1,2}$ die Massen der Teilchen 1 und 2 lässt sich der Hamilton-Operator zu

$$H = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (2.8)$$

schreiben.

Mit den folgenden Einführungen:

- des Schwerpunktes $\vec{X} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$
- des Gesamtimpulses $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$
- der Relativkoordinaten $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$
- des Relativimpulses $\vec{p} = \frac{m_1\vec{p}_1 - m_2\vec{p}_2}{m_1 + m_2}$
- der Masse $M = m_1 + m_2$
- der reduzierten Masse $m = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$

lässt sich der Hamilton-Operator umformen²:

$$\mathbf{H} = \frac{\vec{\mathbf{P}}^2}{2M} + \frac{\vec{\mathbf{p}}^2}{2m} + V(\vec{\mathbf{r}}) \quad (2.9)$$

Die Orts- $|\vec{r}_1, \vec{r}_2\rangle$ und Impuls-Eigenzustände $|\vec{p}_1, \vec{p}_2\rangle$ ergeben sich durch eine unitäre Transformation zu $|\vec{X}, \vec{r}\rangle$ und $|\vec{P}, \vec{p}\rangle$, den Eigenständen des neuen Operators, da die Heisenbergschen Vertauschungsrelationen $[X_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}\mathbf{1}$ und $[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}\mathbf{1}$ auch für diesen neuen Operator gelten.

Das Zwei-Teilchen-Problem besteht somit aus der Beschreibung der Schwerpunktsbewegung und einem Ein-Teilchen-Problem mit reduzierter Masse.

2.4 Streuung eines Wellenpakets

Nach diesen Vorüberlegungen soll nun die Streuung eines Wellenpakets betrachtet werden.

2.4.1 Randbedingungen des Streuproblems

Vorab müssen Randbedingungen aufgestellt werden. Hierzu betrachten wir gestreute Teilchen weit vom Target entfernt, sodass diese sich dort wieder wie freie Teilchen bewegen und somit die Helmholtz-Gleichung

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0 \quad (2.10)$$

erfüllen.

Arnold Sommerfeld hat als Lösungsansatz der Helmholtz-Gleichung für Streuprobleme folgende Lösung gefunden:

$$\psi(\vec{r}, \vec{k}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(k, \theta, \varphi) \quad (2.11)$$

mal dem Phasenfaktor $e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$, der die zeitliche Entwicklung berücksichtigt. Diese Sommerfeldsche Randbedingung stellt die Superposition einer ebenen einlaufenden Welle und einer Kugelwelle mit $f(k, \theta, \varphi)$ dar.

2.4.2 Lösung des Streuproblems mit der Schrödinger-Gleichung

Durch die Reduktion in 2.3.3 kann zur Lösung des Streuproblems die effektive Ein-Teilchen-Schrödinger-Gleichung genutzt werden:

² Die ausführlichere Darstellung der Umformung befindet sich im Anhang auf S. 19.

$$i\hbar\dot{\psi}(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}, t) \quad (2.12)$$

Setzt man den Separationsansatz $\psi(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(\vec{r}, \vec{k})$ mit $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ an, erhält man die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung³:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r}) - E \right) \psi(\vec{r}, \vec{k}) = 0 \quad (2.13)$$

Diese kann nun mit der Sommerfeldschen Randbedingung gelöst werden.

Mit der Annahme, dass ein Wellenpaket $A(\vec{r})$ im Ortsraum um $\vec{r} = 0$ zentriert und im Impulsraum um $\vec{k} = \vec{k}_0$ ist, erhält man nach der Fouriertransformation den Zusammenhang:

$$A(\vec{r}) = \int d^3k \tilde{A}(\vec{k}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (2.14)$$

Setzt man den obigen Separationsansatz ein ergibt sich für die Wellenfunktion:

$$\psi_{\vec{b}}(\vec{r}, t) = \int d^3k \tilde{A}(\vec{k} - \vec{k}_0) \psi(\vec{r}, \vec{k}) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{b}} \quad (2.15)$$

Hierbei ist der Streuparameter \vec{b} berücksichtigt und zeigt sich in $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{b}}$, was die Verschiebung im Ortsraum um \vec{b} angibt.

Zur Untersuchung des zeitlichen Verhaltens wird um $(\vec{k} - \vec{k}_0)$ bis zur ersten Ordnung genähert (so zerfließt das Wellenpaket nicht, sondern propagiert nur). Dies ergibt die Sommerfeldsche Asymptotik:

- $\vec{k} = \vec{k}_0 + (\vec{k} - \vec{k}_0)$
- $E(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 [\vec{k}_0 + (\vec{k} - \vec{k}_0)]^2}{2m} \approx \frac{\hbar^2}{2m} (k_0^2 + 2\vec{k}_0 \cdot (\vec{k} - \vec{k}_0))$
- $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{b}} = e^{-i\vec{k}_0\cdot\vec{b}} e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_0)\cdot\vec{b}}$
- $|\vec{k}| = \sqrt{[\vec{k}_0 + (\vec{k} - \vec{k}_0)]^2} \approx \sqrt{\vec{k}_0^2 + (\vec{k} - \vec{k}_0)^2 + 2\vec{k}_0 \cdot (\vec{k} - \vec{k}_0)} \approx |\vec{k}_0| + \frac{\vec{k}_0}{|\vec{k}_0|} \cdot (\vec{k} - \vec{k}_0)$
- $f(k, \theta, \varphi) \equiv |f(k, \theta, \varphi)| e^{i\phi(k, \theta, \varphi)} \approx |f(k_0, \theta, \varphi)| e^{i\phi(k_0, \theta, \varphi) + i\vec{S}(\vec{k}_0) \cdot (\vec{k} - \vec{k}_0)}$

mit $\vec{S}(\vec{k}_0) = \nabla_k \Phi(\vec{k})|_{\vec{k}_0}$

³ Die ausführlichere Darstellung der Umformung befindet sich im Anhang auf S. 20.

- zusätzlich der Beziehung $\vec{v}_0 = \frac{\hbar \vec{k}_0}{m}$

Eingesetzt in (2.15) ergibt sich genähert:

$$\begin{aligned} \psi_{\vec{b}}(\vec{r}, t) &= \int d^3k \left(\tilde{A}(\vec{k} - \vec{k}_0) e^{-\frac{i}{\hbar} E t} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{b}} \right) \cdot \left(e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} + \frac{1}{r} e^{ik_0 r} f(k, \theta, \varphi) \right) \\ &\approx e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} e^{i\vec{k}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{b})} \int d^3k \tilde{A}(\vec{k} - \vec{k}_0) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot (\vec{v}_0 t - \vec{r} + \vec{b})} \\ &\quad + e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} \frac{1}{r} e^{ik_0 r} f(k_0, \theta, \varphi) e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{b}} \int d^3k \tilde{A}(\vec{k} - \vec{k}_0) e^{-i(\vec{k} - \vec{k}_0) \cdot \left(\vec{v}_0 t + \vec{b} - \vec{r} \frac{\vec{k}_0}{|\vec{k}_0|} - \vec{S}(\vec{k}_0) \right)} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Wieder mit der Fouriertransformation berechnet sich der erste Term der Gleichung (2.16) zu

$$e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} e^{i\vec{k}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{b})} A(\vec{v}_0 t - \vec{r} + \vec{b}) \quad (2.17)$$

– einem frei propagierenden Wellenpaket mit der Geschwindigkeit \vec{v}_0 .

Aus dem zweiten Term der Gleichung (2.16) ergibt sich mit der Fouriertransformation

$$e^{-\frac{i}{\hbar} E_0 t} \frac{1}{r} e^{ik_0 r} f(k_0, \theta, \varphi) A \left(\vec{v}_0 t + \vec{b} - r \frac{\vec{v}_0}{|\vec{v}_0|} - \vec{S}(\vec{k}_0) \right) \quad (2.18)$$

– eine vom Streuzentrum ausgehende Kugelwelle mit $f(k_0, \theta, \varphi)$. Die Phaseninformation steckt hier in $\vec{S}(\vec{k}_0)$.

Im Allgemeinen kann angenommen werden, dass der Detektor weit vom einlaufenden Strahl entfernt steht. So können Interferenzeffekte zwischen dem einlaufenden Strahl und der Streuwelle vernachlässigt werden und der differentielle Wirkungsquerschnitt berechnet sich zu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(k_0, \theta, \varphi)|^2 \quad (2.19)$$

Dies entspricht dem Resultat aus 2.3.1 und rechtfertigt so die zeitunabhängige Rechnung.

3 Berechnung der Streuamplitude

Zur Berechnung der oben zwar aufgeführten, aber noch nicht berechneten Größe der Streuamplitude wird im Folgenden die Methode der Bornschen Näherung verwendet.

3.1 Integralform der Schrödinger-Gleichung

Der Ansatzpunkt zur Bestimmung der Integralgleichung für das Streuproblem ist die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right)\psi(\vec{r}, \vec{k}) = E \psi(\vec{r}, \vec{k}) \quad (3.1)$$

Gesucht werden die Streulösungen, die die bereits erwähnte Sommerfeldsche Randbedingung (2.11) erfüllen.

Mit dem Einsetzen von $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ und der Definition von $Q(\vec{r}, \vec{k}) := \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, \vec{k})$ lässt sich die Schrödinger-Gleichung (3.1) in folgender Form

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\vec{r}, \vec{k}) = Q(\vec{r}, \vec{k}) \quad (3.2)$$

schreiben.⁴ Die Analogie der Schrödinger-Gleichung (3.2) zur inhomogenen Helmholtz-Gleichung ($\Delta\psi = -k^2\psi + a$) ist deutlich zu sehen, wobei in (3.2) aber alle Terme eine Abhängigkeit von $\psi(\vec{r}, \vec{k})$ aufweisen. Die allgemeine Lösung der Gleichung (3.2) setzt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Gleichung

$$(\nabla^2 + k^2) \psi_0(\vec{r}, \vec{k}) = 0 \quad (3.3)$$

und einer speziellen Lösung der Gleichung (3.2) zusammen. Für die homogene Differentialgleichung (3.3) ergibt sich aus der Randbedingung die allgemeine Lösung:

$$\psi_0(\vec{r}, \vec{k}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (3.4)$$

Somit stimmt $\psi_0(\vec{r}, \vec{k})$ mit der einfallenden Welle überein und liefert in dem Gebiet mit $V(\vec{r}) = 0$ die Lösung.

Für die Differentialgleichung (3.2) wird eine spezielle Lösung gesucht, die

$$\psi_s(\vec{r}, \vec{k}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{e^{ikr}}{r} f(k, \theta, \varphi) \quad (3.5)$$

erfüllt, so dass sich

$$\psi(\vec{r}, \vec{k}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \psi_s(\vec{r}, \vec{k}) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \frac{e^{ikr}}{r} f(k, \theta, \varphi) \quad (3.6)$$

als Gestalt der Lösung ergibt. Die spezielle Lösung $\psi_s(\vec{r}, \vec{k})$ kann mithilfe des Verfahrens der Greenschen Funktion bestimmt werden. Hierfür wird der folgende Ansatz gemacht:

⁴ Die ausführlichere Darstellung der Umformung der Schrödinger-Gleichung befindet sich im Anhang auf S. 20.

$$\psi_s(\vec{r}, \vec{k}) = \int_V G(\vec{r}, \vec{r}', \vec{k}) Q(\vec{r}', \vec{k}) d^3r' \quad (3.7)$$

Mit dem Einsetzen von (3.7) in (3.2) ergibt sich

$$\int_V (\Delta + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}', \vec{k}) Q(\vec{r}', \vec{k}) d^3r' = Q(\vec{r}, \vec{k}) \quad (3.8)$$

was nur gilt, wenn die noch zu bestimmende Greensche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}', \vec{k})$

$$(\Delta + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}', \vec{k}) = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.9)$$

erfüllt, so dass sie als eine Lösung der Differentialgleichung (3.2) anzusehen ist, wobei die Funktion $Q(\vec{r}, \vec{k})$ dementsprechend zu setzen ist zu:

$$Q(\vec{r}, \vec{k}) = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.10)$$

Damit kann zur Lösung der Differentialgleichung (3.9) in Kugelkoordinaten übergegangen werden, da die δ -Funktion die Differenz von $\vec{r} - \vec{r}'$ betrachtet, welche als Größe \vec{R} definiert wird. Die Winkelabhängigkeit des Laplaceschen Operators kann aufgrund der Kugelsymmetrie vernachlässigt werden, so dass (3.9) formuliert werden kann zu:

$$\frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} R^2 \frac{dG(R)}{dR} + k^2 G(R) = 0 \quad (3.11)$$

Wird in diese Differentialgleichung der Ansatz $G(R) = \frac{1}{R} g(R)$ eingesetzt, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} R^2 \frac{dG(R)}{dR} + k^2 G(R) &= 0 \\ \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} R^2 \left(\frac{1}{R} g'(R) - \frac{1}{R^2} g(R) \right) + k^2 \frac{1}{R} g(R) &= 0 \\ \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} \left(\frac{R^2}{R} g'(R) - \frac{R^2}{R^2} g(R) \right) + k^2 \frac{1}{R} g(R) &= 0 \\ \frac{1}{R^2} \frac{d}{dR} (R g'(R) - g(R)) + k^2 \frac{1}{R} g(R) &= 0 \\ \frac{1}{R^2} (g'(R) + R g''(R) - g'(R)) + k^2 \frac{1}{R} g(R) &= 0 \\ \frac{1}{R^2} (R g''(R)) + k^2 \frac{1}{R} g(R) &= 0 \\ \frac{g''(R)}{R} + \frac{k^2}{R} g(R) &= 0 \\ g''(R) + k^2 g(R) &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Mit den Lösungen $g^\pm(R) = e^{\pm ikR}$ für die Differentialgleichung (3.12) lässt sich die Greensche Funktion unter Berücksichtigung des Normierungsfaktors $-\frac{1}{4\pi}$, welcher aus dem Winkelanteil folgt, und der Größe $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ bestimmen zu:

$$G^\pm(\vec{r}, \vec{r}', \vec{k}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (3.13)$$

Somit lässt sich die allgemeine Lösungsgestalt (3.6) der Gleichung (3.2) präzise fassen zu:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}, \vec{k}) &= \psi_0(\vec{r}, \vec{k}) + \psi_s(\vec{r}, \vec{k}) \\ &= e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \int_V G(\vec{r}, \vec{r}', \vec{k}) Q(\vec{r}', \vec{k}) d^3r' \quad \left| G^\pm(\vec{r}, \vec{r}', \vec{k}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right. \\ &= e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} Q(\vec{r}', \vec{k}) d^3r' \quad \left| Q(\vec{r}', \vec{k}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}', \vec{k}) \right. \\ &= e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}', \vec{k}) d^3r' \end{aligned} \quad (3.14)$$

Physikalisch ist nur die Greensche Funktion G_0^+ bedeutend, da sie eine auslaufende Kugelwelle beschreibt und die Randbedingung erfüllt, im Gegensatz zur Greenschen Funktion G_0^- , welche eine einlaufende Kugelwelle formuliert. Somit lässt sich Gleichung (3.14) als sogenannte Lippmann-Schwinger-Gleichung (3.15) ausdrücken:

$$\psi(\vec{r}, \vec{k}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \frac{1}{4\pi} \frac{2m}{\hbar^2} \int_V \frac{e^{+ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}', \vec{k}) d^3r' \quad (3.15)$$

Diese stellt die Integralform der Schrödinger-Gleichung dar und ist gegenüber der differentiellen Form der Schrödinger-Gleichung als äquivalent anzusehen. Allerdings eignet sich die Lippmann-Schwinger-Gleichung gut für die Betrachtung des Streuproblems, wie in den folgenden Kapiteln aufgezeigt werden wird.

3.2 Integralform für die Streuamplitude

Als Ausgangspunkt zur Berechnung der Integralform für die Streuamplitude wird die Lippmann-Schwinger-Gleichung (3.15) herangezogen. Mit den Forderungen an das Streuexperiment, dass zum einen die Reichweite des Potentials $V(\vec{r}')$ endlich sein soll und zum anderen, dass der Detektor in einem vom Streuzentrum weit entfernten Punkt, $r \gg r'$, stehen soll, lässt sich diese Näherung verwenden:

$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}' \cong r^2 \left(1 - 2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right)$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \cong r - \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{r}' = r - \vec{e}_r \cdot \vec{r}' \quad (3.16)$$

Zusammen mit der Näherung (3.16) als auch mit $\vec{k}' = k\vec{e}_r$, wobei dieser Ausdruck aus dem Ansatz von $\vec{k} \equiv k\vec{e}_r$ mit den Angaben, dass \vec{e}_r in die Richtung des Standpunktes des Detektors zeigt, und dass eine elastische Streuung vorliegt, so dass entsprechend $|\vec{k}| = |\vec{k}'|$ gilt, resultiert, lässt sich der Ausdruck $e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}$ in der Lippmann-Schwinger-Gleichung (3.15) nähern zu $e^{ikr}e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'}$. Somit ergibt sich, wenn im Nenner die Näherung $|\vec{r} - \vec{r}'| \cong r$ durchgeführt wird, für $\psi(\vec{r}, \vec{k})$ folgender genäherter Ausdruck:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}, \vec{k}) &\cong e^{ikr} - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{e^{ikr} e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'}}{r} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}', \vec{k}) \\ &\cong e^{ikr} - \frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3r' e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}', \vec{k}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Diese Gleichung (3.17) stimmt mit der Form der Gleichung (2.11) überein, so dass sich aus einem einfachen Vergleich dieser beiden Gleichungen die Integralform für die Streuamplitude bestimmen lässt.

$$f(k, \theta, \varphi) = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \int d^3r' e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}', \vec{k}) \quad (3.18)$$

3.3 Erste Bornsche Näherung

Wenn die einfache Näherung einer ebenen Welle für $\psi(\vec{r}, \vec{k})$ angenommen wird, ergibt sich für die Integralform der Streuamplitude (3.18) die Näherung (3.19), die auch als erste Bornsche Näherung bezeichnet wird:

$$f(k, \theta, \varphi) \cong -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \int d^3r' e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} V(\vec{r}') \cong -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \int d^3r' e^{-i(\vec{k}'-\vec{k})\cdot\vec{r}'} V(\vec{r}') \quad (3.19)$$

Sie ist die Fouriertransformierte des Streupotentials und lässt sich im Falle der niederenergetischen Streuung aufgrund von $\vec{k} = \vec{k}' \rightarrow 0$ vereinfacht schreiben als

$$f(k, \theta, \varphi) \cong -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \int V(\vec{r}) d^3r \quad (3.20)$$

Für ein kugelsymmetrisches Potential $V(\vec{r}) = V(r)$ lässt sich die erste Bornsche Näherung (3.19) ebenfalls vereinfachen, da die Achse für das Integral über \vec{r}' entlang von $\vec{k} = \vec{k}' - \vec{k}$ gelegt wird, so dass $(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}' = kr' \cos \theta$ gilt. θ ist der Winkel zwischen \vec{k} und \vec{k}' , wobei \vec{k} in Richtung des Detektors und \vec{k}' in die Einfallrichtung zeigt. (s. Abbildung 3)

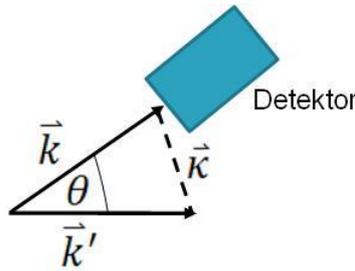


Abbildung 3: Darstellung der Wellenvektoren [3]

Mit dem Übergang in Kugelkoordinaten kann dann die Winkelintegration durchgeführt werden:

$$\begin{aligned}
 f(k, \theta, \varphi) &\cong -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \int e^{-ikr' \cos \theta} V(r') r'^2 \sin \theta dr' d\theta d\varphi \\
 &\cong -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{2\pi}{4\pi} \int e^{-ikr' \cos \theta} V(r') r'^2 \sin \theta dr' d\theta \\
 &\cong -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{2} \int \frac{2 \sin(\kappa r')}{\kappa r'} V(r') r'^2 dr' \\
 &\cong -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{2} \frac{2}{\kappa} \int_0^\infty V(\vec{r}) \frac{r^2}{r} \sin(\kappa r) dr \\
 &\cong -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty V(r) r \sin(\kappa r) dr
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Dabei gilt für κ nach Abbildung 3:

$$\kappa = 2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{3.22}$$

Die erste Bornsche Näherung ist reell und erfüllt so nicht das optische Theorem. Eine geeignete Näherung liefert die Bornsche Näherung für schwache Streupotentiale und für Streuungen bei hohen Energien, wobei die Wechselwirkungszeit der schnellen Teilchen entsprechend kurz ist.

3.4 Die Bornsche Reihe

Auf der bisherigen Betrachtung aufbauend, lässt sich eine Bornsche Näherung nullter Ordnung vorstellen, die eine einlaufende Welle, die sich im Vorbeilaufen vom Potential nicht ändert, beschreibt. Der vorherige Abschnitt setzte sich bereits mit der Bornschen Näherung in Korrektur erster Ordnung auseinander, wobei die Wellenfunktion ψ einmalig „verändert“ wird und sich so anschließend in eine neue Richtung ausbreitet. Entsprechend ist für die Korrektur in zweiter Ordnung eine zweimalige „Veränderung“ von ψ anzusehen. Beim abermaligen Anwenden dieser Idee ergibt sich eine Reihe von Korrekturen höherer Ordnung, die wahrscheinlich gegen die exakte Lösung konvergieren. Um die Bornsche Reihe auch theoretisch zu begründen, wird als Ausgangspunkt die Integralform der Schrödinger-

Gleichung (3.15) herangezogen, die in der Schreibweise (3.23) verwendet wird, wobei $\psi_0(\vec{r})$ für die einlaufende Welle, $G(\vec{r}, \vec{r}', \vec{k})$ für die Greensche Funktion und $V(\vec{r}')$ für das Potential steht.

$$\psi(\vec{r}) = \psi_0(\vec{r}) + \int G(\vec{r}, \vec{r}', \vec{k}) \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}', \vec{k}) d^3r' \quad (3.23)$$

Einsetzen dieses Terms für $\psi(\vec{r})$ in das Integral in (3.23) ergibt:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= \psi_0(\vec{r}) + \int d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}', \vec{k}) \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}') \left\{ \psi_0(\vec{r}') \right. \\ &\quad \left. + \int d^3r'' G(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{k}) \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}'') \psi(\vec{r}'', \vec{k}) \right\} \\ &= \psi_0(\vec{r}) + \int d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}', \vec{k}) \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}') \psi_0(\vec{r}') \\ &\quad + \int \int G(\vec{r}, \vec{r}', \vec{k}) \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}') G(\vec{r}', \vec{r}'', \vec{k}) \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}'') \psi(\vec{r}'', \vec{k}) \quad (3.24) \end{aligned}$$

Wird dieses Vorgehen wiederholt, lässt sich die folgende Reihe schreiben:

$$\psi = \psi_0 + \int G \frac{2m}{\hbar^2} V \psi_0 + \int \int G \frac{2m}{\hbar^2} V G \frac{2m}{\hbar^2} V \psi_0 + \int \int \int G \frac{2m}{\hbar^2} V G \frac{2m}{\hbar^2} V G \frac{2m}{\hbar^2} V \psi_0 + \dots \quad (3.25)$$

Der Ausdruck für ψ (3.23) lässt sich als Anwendung der Bornschen Reihe verstehen. In jedem Teil der Reihe ist die einlaufende Wellenfunktion ψ_0 aufgeführt mit immer mehr Potenzen von der Greenschen Funktion und vom Potential. Die erste Bornsche Näherung endet mit dem zweiten Term und die Korrekturen höherer Ordnung ergeben sich durch „Anfügung“ weiterer Terme dieser Reihe.

Da die Reihe (3.25) als eine formale Formulierung der Bornschen Reihe sehr unhandlich erscheint, wird noch die „kompaktere“ darstellungsfreie Version der Bornschen Reihe eingeführt.

Ausgangspunkt hierfür ist die Lippmann-Schwinger-Gleichung (3.15), allerdings in ihrer noch herzuleitenden darstellungsfreien Form:

Das Eigenwertproblem

$$(H_0 - E)|\psi_{\vec{k}}\rangle = -V|\psi_{\vec{k}}\rangle \quad (3.26)$$

wird für $V \rightarrow 0$ gelöst mit

$$|\psi_0\rangle = |\vec{k}\rangle \quad (3.27)$$

Die spezielle Lösung von (3.26) ergibt sich durch den Resolventenoperator $(H_0 - (E \pm i0))^{-1}$. Da hier zu berücksichtigen ist, dass der Resolventenoperator gegeben ist durch $R(z) = (A - z1)^{-1}$ mit $z \in \mathbb{C}$ zum Eigenwertproblem $(A - z1)|a\rangle = a|a\rangle$ nicht regulär ist,

wenn z einem diskreten Eigenwert a entspricht, so dass $R(a)$ bei $z = a$ einen Pol erster Ordnung hat. Wobei dies bei der vorliegenden Betrachtung bei $E \pm i0$ der Fall ist. Der Resolventenoperator entspricht dabei

$$R(z) = -\frac{2m}{\hbar^2} G \quad (3.28)$$

Dies kann eingesehen werden über:

$$(\nabla^2 + k^2)G = -\frac{2m}{\hbar^2} \langle \vec{r} | (H_0 - E) G | \vec{r}' \rangle = \delta^3(\vec{r} - \vec{r}') \quad (3.29)$$

Dies entspricht genau der Bedingung, die an die ermittelte Greensche Funktion in Kapitel 3.1 gestellt wurde. Die spezielle Lösung vom Eigenwertproblem (3.26) lässt sich so bestimmen zu:

$$|\psi_s\rangle = +\frac{2m}{\hbar^2} GV|\psi_{\vec{k}}\rangle \quad (3.30)$$

Somit kann die Lösung des Eigenwertproblems (3.26) schließlich zusammengesetzt werden aus (3.27) und (3.30) zu:

$$|\psi_{\vec{k}}\rangle = |\vec{k}\rangle + \frac{2m}{\hbar^2} GV|\psi_{\vec{k}}\rangle \quad (3.31)$$

Dies ist die darstellungsfreie Form der Lippmann-Schwinger-Gleichung, die iterativ gelöst werden kann: Wenn der Ausdruck für $|\psi_{\vec{k}}\rangle$ wiederum in (3.31) eingesetzt wird, ergibt sich

$$\begin{aligned} |\psi_{\vec{k}}\rangle &= |\vec{k}\rangle + \frac{2m}{\hbar^2} GV \left(|\vec{k}\rangle + \frac{2m}{\hbar^2} GV|\psi_{\vec{k}}\rangle \right) \\ &= |\vec{k}\rangle + \frac{2m}{\hbar^2} GV|\vec{k}\rangle + \frac{2m}{\hbar^2} GV \frac{2m}{\hbar^2} GV|\psi_{\vec{k}}\rangle \end{aligned} \quad (3.32)$$

Mit wiederholenden Vorgehen ergibt sich so, wenn der Beginn als

$$|\psi_{\vec{k}}\rangle_0 = |\vec{k}\rangle \quad (3.33)$$

festgelegt wird:

$$|\psi_{\vec{k}}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |\psi_{\vec{k}}\rangle_n \quad (3.34)$$

Ausgehend von den Schreibweisen $\psi(\vec{r}, \vec{k}) = \langle \vec{r} | \psi_{\vec{k}} \rangle$ und $e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = \langle \vec{k} | \vec{r} \rangle$ kann die Integralform für die Streuamplitude (3.18) wie folgt umgeschrieben werden:

$$f(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \langle \vec{k}' | V | \psi_{\vec{k}} \rangle \quad (3.35)$$

Somit ergibt sich für die Bornsche Reihe der folgende Ausdruck:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \langle \vec{k}' | V | \psi_{\vec{k}} \rangle_n \quad (3.36)$$

Dieser kann mithilfe von (3.34) bestimmt werden. So ergibt sich für f_0 mit (3.33)

$$f_0 = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \langle \vec{k}' | V | \psi_{\vec{k}} \rangle_0 = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \langle \vec{k}' | V | \vec{k} \rangle \quad (3.37)$$

und für f_1 mit $|\psi_{\vec{k}}\rangle_1 = \frac{2m}{\hbar^2} GV |\vec{k}\rangle$

$$f_1 = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \langle \vec{k}' | V | \psi_{\vec{k}} \rangle_1 = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \langle \vec{k}' | V \frac{2m}{\hbar^2} GV | \vec{k} \rangle \quad (3.38)$$

und für f_2 mit $|\psi_{\vec{k}}\rangle_2 = \frac{2m}{\hbar^2} GV \frac{2m}{\hbar^2} GV |\vec{k}\rangle$

$$f_2 = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \langle \vec{k}' | V | \psi_{\vec{k}} \rangle_2 = -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{4\pi} \langle \vec{k}' | V \frac{2m}{\hbar^2} GV \frac{2m}{\hbar^2} GV | \vec{k} \rangle \quad (3.39)$$

Die bereits diskutierte grafische Darstellung der Bornschen Reihe verdeutlicht somit die einzelnen Streuamplituden. (s. Abbildung 4)

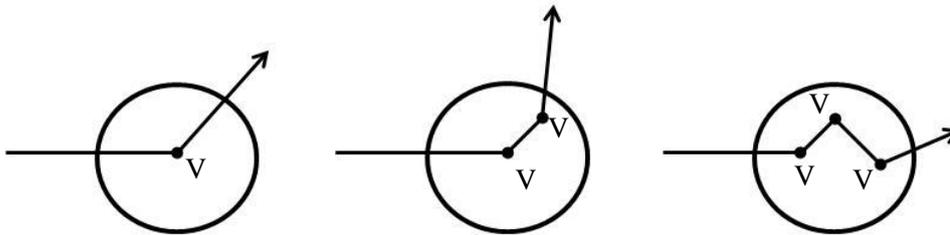


Abbildung 4:

Grafische Darstellung der Bornschen Reihe für f_0 bis f_2 [1]

Aus Abbildung 4 ist zu entnehmen, dass die Greensche Funktion als Propagator fungiert, das heißt, dass sie die freie Bewegung des Streuteilchens zwischen den Wechselwirkungen anzeigt.

3.5 Zwei Beispiele

Die Betrachtung der Bornschen Reihe soll im Folgenden an zwei Beispielen abschließend erörtert werden.

3.5.1 Yukawa-Potential

Da das Yukawa-Potential ein sehr vages Modell für die Bindungskräfte in einem Atomkern darstellt und für das Potential schnell genug gegen null geht, d.h. $V(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, wird die Bornsche Näherung am Beispiel des Yukawa-Potentials

$$V(r) = g \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (3.40)$$

betrachtet. Als Konstante ist g und als Regulator, der die Ausrechnung der Integration gestattet, ist μ anzusehen. Somit ergibt sich als Bornsche Näherung für das Yukawa-Potential aus (3.21):

$$\begin{aligned}
f(k, \theta, \varphi) &\cong -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty V(r) r \sin(\kappa r) dr \quad \left| V(r) = g \frac{e^{-\mu r}}{r} \right. \\
&\cong -\frac{2m}{\hbar^2} \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty g \frac{e^{-\mu r}}{r} r \sin(\kappa r) dr \\
&\cong -\frac{2m g}{\hbar^2 \kappa} \int_0^\infty e^{-\mu r} \sin(\kappa r) dr \\
&= -\frac{2m g}{\hbar^2 \kappa} \left[-\frac{e^{-\mu r} (\mu \sin(\kappa r) + \kappa \cos(\kappa r))}{\kappa^2 + \mu^2} \right]_0^\infty \\
&\cong -\frac{2m g}{\hbar^2} \frac{1}{\mu^2 + \kappa^2}
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Mit der Definition des Wirkungsquerschnittes (2.19) ergibt sich für den Wirkungsquerschnitt des Yukawa-Potentials unter Berücksichtigung der Relation (3.22):

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Yukawa}}(k, \theta) &= \frac{4m^2 g^2}{\hbar^4} \frac{1}{(\mu^2 + \kappa^2)^2} \quad \left| \kappa = 2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right. \\
&= \frac{4m^2 g^2}{\hbar^4} \frac{1}{\left(\mu^2 + \left(2k \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2\right)^2} \\
&= \frac{4m^2 g^2}{\hbar^4} \frac{1}{\left(\mu^2 + 4k^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

3.5.2 Coulomb-Potential

Im Grenzfall des Yukawa-Potentials, indem $g = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}$ gesetzt wird und μ gegen null geht ($\mu \rightarrow 0$), bildet das Yukawa-Potential das Coulomb-Potential ab. Für dieses ergibt sich analog zu der Rechnung für das Yukawa-Potential (s. Kapitel 3.5.1) für den Wirkungsquerschnitt:⁵

$$\left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{\text{Coulomb}} = \frac{Z^2 e^4}{\left(16 \pi \epsilon_0 E \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2} \tag{3.43}$$

Dies ist die Rutherford-Formel, so dass die Bornsche Näherung das exakte Ergebnis wie die klassische Mechanik liefert. Dies ist allerdings für den Fall der Bornschen Näherung eher zufällig, weil die Lippmann-Schwinger-Gleichung (3.15) und die Bornsche Reihe aufgrund dessen, dass das Coulombsche-Potential nicht schnell genug mit steigendem r abfällt, nicht direkt auf die Rutherford-Streuung anwendbar ist.

⁵ Die Rechnung ist im Anhang auf S. 21 beigefügt.

4 Fazit

Zusammenfassend lässt sich festhalten, dass Streuprozesse in der Quantenmechanik mit einer zeitunabhängigen Rechnung betrachtet werden können. Zusammen mit den an die Streuexperimente gestellten Anforderungen (s. Kapitel 2.1) zeigt sich, dass die experimentell interessante Größe des differentiellen Streuquerschnittes gegeben ist durch (2.19). Damit wird die Streuamplitude zur zentralen Größe, die zu bestimmen ist.

Eine Möglichkeit die Streuamplitude zu näherungsweise zu berechnen stellt die Bornsche Näherung dar. Ausgangspunkt für dieses Verfahren ist die Lippmann-Schwinger-Gleichung (3.15), welche die Integralform der zeitunabhängigen Schrödinger-Gleichung darstellt und aus der die Integralform für die Streuamplitude (3.18) bestimmt werden kann.

5 Literaturverzeichnis

- [1] BÖHM, M., *Kapitel 2: Quantenmechanik von Streuprozessen*, S. 29-40.
- [2] EHLOTZKY, Fritz, *Quantenmechanik und ihre Anwendungen, Mit 26 Abbildungen und 101 Übungsaufgaben, Kapitel 9.4: Die Bornsche Störungsreihe*, Berlin [u.a.]: Springer, 2005, S. 238-247.
- [3] GRIFFITHS, David J., *Quantenmechanik, Kapitel 11: Streuung*, München: Pearson, 2012, S. 439-466.

6 Anhang

6.1 Anhang zu Kapitel 2.3.1

Berechnung des Streuteilchenstroms:

$$\begin{aligned}
 j_{\text{streu}} &= \frac{i\hbar}{2m} \left[\left(-\frac{ik}{r} e^{-ikr} f(E, \theta, \varphi) - \frac{e^{-ikr}}{r^2} f(E, \theta, \varphi) \right) \cdot \frac{e^{ikr}}{r} f(E, \theta, \varphi) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e^{-ikr}}{r} f(E, \theta, \varphi) \cdot \left(\frac{ik}{r} e^{ikr} f(E, \theta, \varphi) - \frac{e^{ikr}}{r^2} f(E, \theta, \varphi) \right) \right] \\
 &= \frac{i\hbar}{2m} \frac{1}{r^2} f^2(E, \theta, \varphi) \cdot \left[-ik - \frac{1}{r} - ik + \frac{1}{r} \right] \\
 &= -\frac{2i^2 \hbar k}{2mr^2} f^2(E, \theta, \varphi) \\
 &= \frac{\hbar k}{mr^2} f^2(E, \theta, \varphi) \qquad \left| \frac{\hbar k}{m} = v \right. \\
 &= \frac{v}{r^2} |f(E, \theta, \varphi)|^2
 \end{aligned}$$

6.2 Anhang zu Kapitel 2.3.3:

Umformung des Hamilton-Operators:

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) & |\vec{r} &= \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \\
 &= \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V(\vec{r}) & |\vec{P} &= \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \\
 &= \frac{(\vec{P} - \vec{p}_2)^2}{2m_1} + \frac{(\vec{P} - \vec{p}_1)^2}{2m_2} + V(\vec{r}) = \frac{\vec{P}^2 + \vec{p}_2^2 - 2\vec{P}\vec{p}_2}{2m_1} + \frac{\vec{P}^2 + \vec{p}_1^2 - 2\vec{P}\vec{p}_1}{2m_2} + V(\vec{r}) \\
 &= \frac{\vec{P}^2 + \vec{p}_2^2 - 2\vec{p}_1\vec{p}_2 - 2\vec{p}_2^2}{2m_1} + \frac{\vec{P}^2 + \vec{p}_1^2 - 2\vec{p}_1\vec{p}_2 - 2\vec{p}_1^2}{2m_2} + V(\vec{r}) \\
 &= \frac{\vec{P}^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - \frac{\vec{p}_2^2}{2m_1} - \frac{\vec{p}_1^2}{2m_2} - \frac{2\vec{p}_1\vec{p}_2}{2m_1} - \frac{2\vec{p}_1\vec{p}_2}{2m_2} + V(\vec{r}) & |M &= m_1 + m_2 \\
 &= \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{P}^2}{2M} - \frac{\vec{p}_2^2}{2m_1} - \frac{\vec{p}_1^2}{2m_2} - \frac{2\vec{p}_1\vec{p}_2}{2m_1} - \frac{2\vec{p}_1\vec{p}_2}{2m_2} + V(\vec{r}) \\
 &= \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}_1^2 + 2\vec{p}_1\vec{p}_2 + \vec{p}_2^2}{2(m_1 + m_2)} - \frac{\vec{p}_2^2}{2m_1} - \frac{\vec{p}_1^2}{2m_2} - \frac{2\vec{p}_1\vec{p}_2}{2m_1} - \frac{2\vec{p}_1\vec{p}_2}{2m_2} + V(\vec{r}) \\
 &= \frac{\vec{P}^2}{2M} - \frac{\vec{p}_1^2 m_1}{2(m_1 + m_2)m_2} - \frac{\vec{p}_2^2 m_2}{2(m_1 + m_2)m_1} - \frac{2\vec{p}_1\vec{p}_2}{2(m_1 + m_2)} \\
 &= \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\vec{p}_2^2 m_2^2}{m(m_1 + m_2)^2} - \frac{\vec{p}_1^2 m_1^2}{m(m_1 + m_2)^2} - \frac{2\vec{p}_1\vec{p}_2 m_1 m_2}{m(m_1 + m_2)^2} \right\} + V(\vec{r})
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{1}{2m(m_1 + m_2)^2} \{ \vec{p}_2^2 m_2^2 + \vec{p}_1^2 m_1^2 - 2\vec{p}_1 \vec{p}_2 m_1 m_2 \} + V(\vec{r})$$

$$\left| \vec{p} = \frac{m_1 \vec{p}_1 - m_2 \vec{p}_2}{m_1 + m_2}, \vec{p}^2 = \frac{(m_1 \vec{p}_1 - m_2 \vec{p}_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{m_1^2 \vec{p}_1^2 + m_2^2 \vec{p}_2^2 - 2m_1 m_2 \vec{p}_1 \vec{p}_2}{(m_1 + m_2)^2} \right.$$

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r})$$

6.3 Anhang zu Kapitel 2.4.2

Effektive Ein-Teilchen-Problem-Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \dot{\psi}(\vec{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}, t)$$

Ansatz: $\psi(\vec{r}, t) = e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(\vec{r}, \vec{k})$ mit $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

$$\dot{\psi}(\vec{r}, t) = -\frac{i}{\hbar} E e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(\vec{r}, \vec{k})$$

$$\sim -\frac{i^2 \hbar}{\hbar} E e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(\vec{r}, \vec{k}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} \psi(\vec{r}, \vec{k})$$

$$E \psi(\vec{r}, \vec{k}) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) \right) \psi(\vec{r}, \vec{k})$$

$$0 = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) - E \right) \psi(\vec{r}, \vec{k})$$

6.4 Anhang zu Kapitel 3.1

Umformung der Schrödinger-Gleichung von (3.1) zu (3.2):

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) - E \right) \psi(\vec{r}, \vec{k}) = 0 \quad \left| E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right.$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) \psi(\vec{r}, \vec{k}) = 0$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) \psi(\vec{r}, \vec{k}) = -V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, \vec{k})$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (\nabla^2 + k^2) \psi(\vec{r}, \vec{k}) = -V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, \vec{k}) \quad \left| \cdot -\frac{2m}{\hbar^2} \right.$$

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\vec{r}, \vec{k}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, \vec{k}) \quad \left| \frac{2m}{\hbar^2} V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, \vec{k}) := Q(\vec{r}, \vec{k}) \right.$$

$$(\nabla^2 + k^2) \psi(\vec{r}, \vec{k}) = Q(\vec{r}, \vec{k})$$

6.5 Anhang zu Kapitel 3.5.2

Berechnung des Wirkungsquerschnitts:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Coulomb} &= \left(\frac{2mZe^2}{4\pi\epsilon_0\hbar^2} \right)^2 \frac{1}{16k^4 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\
 &= \frac{4m^2Z^2e^4}{16\pi^2\epsilon_0^2\hbar^4} \frac{1}{16k^4 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \left| k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \right. \\
 \approx \left. \frac{d\sigma}{d\Omega} \right|_{Coulomb} &= \frac{m^2Z^2e^4}{4\pi^2\epsilon_0^2\hbar^4} \frac{\hbar^4}{16 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) 4m^2E^2} = \frac{Z^2e^4}{16\pi^2\epsilon_0^2} \frac{1}{16 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) E^2} \\
 &= \frac{Z^2e^4}{\left(16\pi\epsilon_0E \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2}
 \end{aligned}$$