

# Hamiltonsches Chaos

Nachbearbeitung zum Vortrag über  
deterministische chaotische Systeme

Jim Bachmann, Thorsten Teuber

17.01.2013

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Hamiltonische Mechanik</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Kanonische Transformationen</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Hamilton-Jacobi-Theorie</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Wirkung-Winkel-Variablen</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Periodizität</b>	<b>6</b>
<b>7</b>	<b>Beispiel: Kepler Problem</b>	<b>6</b>
<b>8</b>	<b>Nichtintegrale Hamiltonsche Systeme</b>	<b>8</b>
8.1	Poincaré-Abbildung . . . . .	8
8.2	Henon-Heiles Potential . . . . .	10
<b>9</b>	<b>Störungstheorie</b>	<b>10</b>
<b>10</b>	<b>KAM-Theorem</b>	<b>11</b>
10.1	Goldene Schnitt . . . . .	12
10.2	Asteroidengürtel . . . . .	12
<b>11</b>	<b>Schlusswort</b>	<b>13</b>

# 1 Einleitung

Viele dynamische Systeme, wie beispielsweise das magnetische Pendel mit 3 Magneten, scheinen im Experiment bei gleichen Startbedingungen unterschiedliche Ergebnisse zu liefern. Dies wirft die Frage auf, wie ein deterministisches System zufällige Ergebnisse zeigen kann. In dieser Nachbearbeitung des Vortrags soll dieser Widerspruch gelöst werden, indem eine kurze Einführung in die Theorie nichtlinearer Dynamik gegeben wird.

Es werden nur konservative Systeme mit einer nicht explizit zeitabhängigen Hamiltonfunktion betrachtet.

## 2 Hamiltonische Mechanik

Ausgehend von der Lagrange-Gleichung  $L = T - V$  führen wir mit Hilfe von generalisierten Orts- und Impulsvariablen  $p$  und  $q$  die Hamilton-Gleichung ein:

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L = T + V = E, \quad (1)$$

wobei ab dem 2. Gleichheitszeichen vorausgesetzt wird, dass es sich um konservative Systeme handelt. Um die volle Dynamik eines Hamiltonischen-System beschreiben zu können, müssen folgende  $2n$  Bewegungsgleichungen gelöst werden:

$$\dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} = \left( \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n} \right) \quad (2)$$

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}} = -\left( \frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q_n} \right) \quad (3)$$

Einen Vorteil erkennen wir bei sogenannten zyklischen Variablen, die auf eine Erhaltungsgröße führen: Ist z.B.  $H$  nicht explizit von  $q_i$  abhängig, so ist  $\dot{p}_i = 0$  und somit elementar integrabel. Dies impliziert, dass  $p$  eine Erhaltungsgröße ist.

Dass eine Funktion  $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$  eine Erhaltungsgröße liefert, lässt sich über das totale Differential  $df$  wie folgt ausdrücken:

$$0 = \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \vec{q}} \frac{d\vec{q}}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \vec{q}} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} - \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \frac{\partial H}{\partial \vec{q}} =: \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, \quad (4)$$

wobei  $\{f, H\}$  die Poisson-Klammer bezeichnet. Diese Gleichung sagt speziell für nicht explizit zeitabhängige Funktionen voraus, dass sie genau dann eine Erhaltungsgröße liefern, wenn die Poisson-Klammer mit dem Hamiltonoperator verschwindet:  $\{f, H\} = 0$ .

Allgemein ist die Poisson-Klammer für zwei Funktionen  $f$  und  $g$  definiert als:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (5)$$

Leicht nachzurechnen sind auch die „fundamentalen Poisson-Klammern“ zwischen Koordinaten:

$$\{q_i, q_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}; \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \quad (6)$$

### 3 Kanonische Transformationen

Es ist möglich einen Koordinatenwechsel in der Hamiltonfunktion durchzuführen:

$$q_i \rightarrow q'_i, \quad p_i \rightarrow p'_i, \quad H \rightarrow H', \quad (7)$$

wobei die neuen Koordinaten von allen alten Koordinaten abhängen können. Wir nennen eine Transformation genau dann kanonisch, wenn die hamiltonischen Bewegungsgleichungen auch in den neuen Koordinaten gültig sind.

Jede Transformation wird durch eine Erzeugendenfunktion  $S$  beschrieben, mit deren Hilfe eine Bedingung formuliert werden kann, dass es sich tatsächlich um eine kanonische Transformation handelt:

$$\vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - H = \vec{p}' \cdot \dot{\vec{q}}' - H' + \frac{dS}{dt}. \quad (8)$$

Auf der linken Seite steht die Lagrange-Funktion, weshalb die rechte Seite in das Wirkungsintegral eingesetzt werden kann. Fordert man, dass dessen virtuelle Verrückung Null ergeben muss, so kommt man auf die Bewegungsgleichungen der gestrichelten Koordinaten. Geht man andererseits von einer Erzeugendenfunktion  $S = S_1(\vec{q}, \vec{q}', t)$  aus und vergleicht den nach  $dS_1$  umgeformten Ausdruck 8 mit dem totalen Differential von  $S_1$ , erhält man die Bestimmungsgleichungen

$$\vec{p} = \frac{\partial S_1}{\partial \vec{q}}; \quad \vec{p}' = -\frac{\partial S_1}{\partial \vec{q}'}; \quad H' = H + \frac{\partial S_1}{\partial t}, \quad (9)$$

mit denen feststeht, dass die Transformation durch  $S_1$  bereits vollständig beschrieben ist.

Durch Legendre-Transformation können weitere Erzeugendenfunktionen gefunden werden, die jeweils von einer alten und einer neuen Koordinate (und der Zeit) abhängen:

- $S_2 = S_2(\vec{q}, \vec{p}', t)$  führt zu

$$\Rightarrow \vec{p} = \frac{\partial S_2}{\partial \vec{q}}; \quad \vec{q}' = \frac{\partial S_2}{\partial \vec{p}'}; \quad H' = H + \frac{\partial S_2}{\partial t} \quad (10)$$

- $S_3 = S_3(\vec{p}, \vec{q}', t)$  führt zu

$$\Rightarrow \vec{q} = -\frac{\partial S_3}{\partial \vec{p}}; \quad \vec{p}' = -\frac{\partial S_3}{\partial \vec{q}'}; \quad H' = H + \frac{\partial S_3}{\partial t} \quad (11)$$

- $S_4 = S_4(\vec{p}, \vec{p}', t)$  führt zu

$$\Rightarrow \vec{q} = -\frac{\partial S_4}{\partial \vec{p}}; \quad \vec{q}' = \frac{\partial S_4}{\partial \vec{p}'}; \quad H' = H + \frac{\partial S_4}{\partial t} \quad (12)$$

## 4 Hamilton-Jacobi-Theorie

In der Hamilton-Jacobi-Theorie werden kanonische Transformationen benutzt, um alle  $q'_i$  und  $p'_i$  konstant werden zu lassen. Ist dies der Fall, sind die Hamiltongleichungen elementar integrierbar.

Aus den Bewegungsgleichungen 2 und 3 (der gestrichenen Koordinaten) folgt dann, dass  $H'$  nicht von  $q'_i$  und  $p'_i$  abhängen darf. Trivialerweise setzt man  $H' = 0$  an und kommt auf die Hamilton-Jacobi-Gleichung:

$$H' = H\left(\vec{q}, \frac{\partial S}{\partial \vec{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \quad (13)$$

Dies ist eine Bestimmungsgleichung für  $S$ , womit das Problem nun nicht mehr darin besteht die  $2n$  Bewegungsgleichungen zu lösen, sondern  $S$  zu finden.

Für integrable Systeme, d.h. Systeme, die bei  $n$  Freiheitsgraden  $n$  Erhaltungsgrößen  $A_i(\vec{q}, \vec{p}) = \alpha_i$  besitzen, ist dies immer möglich. Werden die Impulse mit den Erhaltungsgrößen identifiziert ( $\vec{p}' = \alpha_1, \dots, \alpha_N$ ), ergeben sich die hamiltonischen Bewegungsgleichungen zu

$$\dot{q}'_i = \frac{\partial H'(\vec{\alpha})}{\partial \alpha_i} = \nu_i(\vec{\alpha}) = \text{const}, \quad \dot{p}'_i = 0 \quad (14)$$

und sind elementar lösbar. Die Hamilton-Gleichungen sind in diesem Fall also integrierbar.

## 5 Wirkung-Winkel-Variablen

Wir betrachten die Erhaltungsgrößen  $A_i(\vec{q}, \vec{p}) = \text{const}, i = 1, \dots, n$  im Phasenraum und stellen fest, dass obige Gleichung auch als eine Trajektorie im Phasenraum aufgefasst werden kann. Die Gesamtheit der Phasenraumtrajektorien  $A_1, \dots, A_n$  beschreibt eine Mannigfaltigkeit  $M$ , die über die Startbedingungen des Systems festgelegt ist. Auf diesen  $n$  Trajektorien lassen sich genau  $n$  tangentielle Vektorfelder  $v_i = \left(\frac{\partial A_i}{\partial p_i}, -\frac{\partial A_i}{\partial q_i}\right)$  definieren<sup>1</sup>. Das *Poincaré-Hopf-Theorem* sagt uns nun, dass es sich bei  $M$  um einen  $n$ -Dimensionalen Volltorus handeln muss, auf dem genau  $n$  geschlossene Kurven  $\Gamma_i, i = 1, \dots, n$  definiert werden können, die sich nicht ineinander transformieren lassen.

Entlang dieser Kurven definieren wir uns die Wirkungskoordinate  $J$ :

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_i} \sum_{k=1}^n p_k dq_k. \quad (15)$$

Dies entspricht der Wirkung entlang der Kreisbahn  $\Gamma_i$ .

---

<sup>1</sup>Im Vortrag findet sich ein Beweis.

Die  $p_k$  sind im allgemeinen von den  $q_i$  und den  $A_i$  abhängig:  $p_k = p_k(\vec{q}, \vec{A})$ . Über  $q$  wird jedoch integriert, daher hängen die Wirkungskordinaten nur von den Erhaltungsgrößen ab:  $J_i = J_i(\vec{A})$  und sind somit ebenfalls Konstanten der Bewegung.

Für die Transformation  $(\vec{q}, \vec{p}) \rightarrow (\vec{\theta}, \vec{J})$  lässt sich die Erzeugendenfunktion  $S_2(\vec{q}, \vec{J}) = \int \vec{p} d\vec{q}$  allgemein angeben. Da  $\vec{J}$  konstant ist, liefern die hamiltonischen Bewegungsgleichungen  $\dot{\theta}_i = \frac{\partial H'}{\partial J_i} = \omega_i(\vec{J}) = \text{const}$ . Die Lösung des Systems ist also trivial:

$$J_i = \text{const} \tag{16}$$

$$\theta_i = \omega_i t + \beta_i \tag{17}$$

wobei die  $\omega_i$  und  $\beta_i = \theta_i(0)$  durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind.

Die Benennung der 2. Variablen als Winkel  $\theta$  wird klar, wenn man ihr Verhalten bei Oszillation betrachtet wird. Hier zeigt sich, dass sich  $\theta$  bei einer Oszillation um  $2\pi$  ändert, was dem Verhalten eines Winkels entspricht. Aus der Definition von  $\omega = \dot{\theta}$  folgt direkt, dass  $\omega$  eine Winkelgeschwindigkeit bezeichnet.

## 6 Periodizität

Im vorherigen Abschnitt haben wir die Wirkungs- und Winkelvariablen  $\vec{J} = \text{const}$  und  $\vec{\theta} = 2\pi$ -periodisch eingeführt. Natürlich können auch die ursprünglichen Variablen in Abhängigkeit der transformierten Variablen aufgefasst werden  $(\vec{q}(\vec{\theta}, \vec{J}), \vec{p}(\vec{\theta}, \vec{J}))$ , wodurch diese auch  $2\pi$ -periodisch sein müssen.

Über die Fourier-Analyse der Frequenzen lässt sich feststellen, dass die Bewegung eines Systems genau dann periodisch ist, wenn die einzelnen Frequenzen  $\omega_i$  der Koordinaten vielfache einer Grundfrequenz  $\omega_0$  sind. Ist dies der Fall, werden die Frequenzen als *kommensurabel* bezeichnet. Sind die Frequenzen nicht kommensurabel, ist die Bewegung nicht periodisch. Die Phasenraumtrajektorie trifft sich also nie wieder selbst, ist aber an die Torusoberfläche gebunden. Anschaulich kann man sich somit klarmachen, dass die Trajektorie irgendwann die ganze Torusfläche ausfüllt. Sie besitzt also Kurven, wie auch Flächencharakter und somit eine fraktale Dimension.

## 7 Beispiel: Kepler Problem

Die Transformation in Wirkung-Winkel-Koordinaten soll hier einmal am Beispiel des Kepler Problems gezeigt werden. Betrachtet wird ein Planet der Masse  $m$ , welcher sich im Abstand  $r$  um einen Stern mit der Masse  $M$  bewegt. Als Potential wird hier das Newtonsche-Gravitationspotential angesetzt:

$$V = -\frac{GmM}{r} := -\frac{k}{r}$$

Der Übergang in Relativ- und Polarkoordinaten liefert:

$$H = \frac{p_r^2}{2\mu} + \frac{p_\phi^2}{2\mu r^2} - \frac{k}{r},$$

mit der reduzierten Masse  $\mu$  und den relativen Impulsen  $p_r, p_\phi$ . Dies führt mit der Hamilton-Jacobi Gleichung

$$H(q,p) = H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = H' = E,$$

zur Gleichung:

$$\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{\mu r^2} \left(\frac{\partial S_\phi}{\partial \phi}\right)^2 - 2\left(E + \frac{k}{r}\right) = 0$$

Nun wird die Definition der erzeugenden Funktion verwendet:

$$p_r = \frac{\partial S_r}{\partial r}, p_\phi = \frac{\partial S_\phi}{\partial \phi}$$

Der Hamiltonian hat keine  $\phi$  Abhängigkeit. Daraus lässt sich direkt folgern, dass der Impuls in  $\phi$ -Richtung eine Erhaltungsgröße ist:

$$\frac{\partial S}{\partial \phi} = \text{const} = p_\phi$$

Nun muss, um den Hamiltonian zu transformieren, noch der Impuls in  $r$  Richtung bestimmt werden:

$$\frac{\partial S}{\partial r} = p_r = \sqrt{2E + \frac{2k}{r} - \frac{p_\phi^2}{\mu r^2}}$$

Aus diesen Impulsen lassen sich die neuen Wirkungskoordinaten direkt bestimmen:

$$J_\phi = \frac{1}{2\pi} \oint p_\phi d\phi = \frac{1}{2\pi} p_\phi \int_0^{2\pi} d\phi = p_\phi$$

$$J_r = \frac{1}{2\pi} \oint p_r dr = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{2E + \frac{2k}{r} - \frac{p_\phi^2}{\mu r^2}} dr = \frac{\sqrt{\mu k}}{\sqrt{-2E}} - J_\phi$$

Da das System konservativ ist, kann aus der Energieerhaltung nun die Hamiltonfunktion bestimmt werden:

$$E = \frac{-\mu k^2}{2(J_r + J_\phi)^2} = H$$

Und die Frequenzen lauten demnach:

$$\omega_i = \frac{\partial H}{\partial J_i}, \quad \omega_r = \omega_\phi = \frac{\mu k^2}{(J_r + J_\phi)^3}$$

Somit ist die Transformation in Wirkung-Winkel-Koordinaten abgeschlossen.

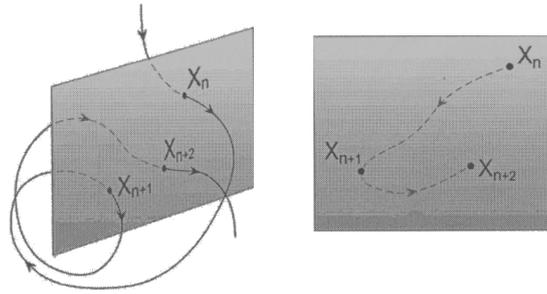


Abbildung 1: Links: Poincaré-Schnitt<sup>2</sup> mit Phasenraumtrajektorien. Rechts: Die Durchstoßpunkte  $x_i$  bilden die Poincaré-Abbildung.

Zusammenfassend lassen sich folgende Beobachtungen machen:

- Die Lösungen sind 2 Kreisbahnen, keine Ellipsen.
- Die Kreisbahnen haben den Radius  $J_i$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega_i$ . Erinnern wir uns an Mathe II, sind dies genau Toruskordinaten.
- $\omega_r = \omega_\phi$  ist das 3. Keplersche Gesetz in Wirkung-Winkel Koordinaten.
- Die Frequenzen sind kommensurabel  $\omega_r = \omega_\phi$ , damit sind die Bahnen periodisch und das Zwei-Körper Problem ist stabil.

## 8 Nichtintegrale Hamiltonsche Systeme

Ein System mit  $n$  Freiheitsgeraden und  $n$  Erhaltungsgrößen, welche Poisson-kommutieren, ist integrabel. Eindimensionale Systeme sind demnach immer Integrabel. Für Systeme mit  $n > 1$  Dimensionen, ist es leider nicht so einfach Aussagen über die Integrabilität zu treffen. Das Problem ist, dass es kein „Rezept“ gibt, um Erhaltungsgrößen zu finden. Daher bedient man sich dem Poincaré-Schnitt (Siehe Abbildung 1).

### 8.1 Poincaré-Abbildung

Durch den mehrdimensionalen Phasenraum wird eine Fläche gelegt und jeder Durchstoßpunkt der Phasenraumtrajektorie markiert. So entsteht die Poincaré-Abbildung. Wie im Vortrag gezeigt, erkennt man integrable Systeme an diskreten Strukturen in der Poincaré-Abbildung. Dies kann man sich schnell am Beispiel eines Systems mit 2-Freiheitsgraden  $H(q_1, q_2, p_1, p_2)$  plausibilisieren:

$$H(q_1, q_2, p_1, p_2) = E, \quad f(q_1, q_2, p_1, p_2) = \alpha$$

---

<sup>2</sup>[1]

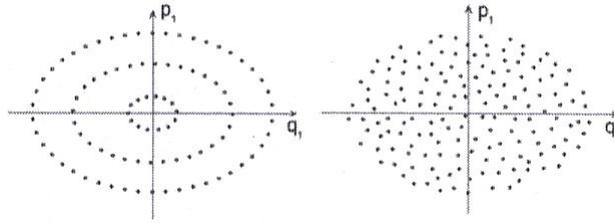


Abbildung 2: Poincaré-Abbildung<sup>3</sup> auf Poincaré-Schnitt( $q_1, p_1$ ): integrables System links und chaotisches System rechts.

beschreibt ein System mit Energieerhaltung und einer zweiten Erhaltungsgröße  $\alpha$ . Mit 2 Gleichungen ist es möglich 2 Variablen zu eliminieren und man erhält z.B.  $p_1(q_1, q_2, E, \alpha)$ . Werden nun die Punkte mit konstantem  $q_2 = 0$  betrachtet liefert dies:

$$p_1(q_1, 0, E, \alpha)$$

Diese Gleichung beschreibt eine Kurve in der Fläche  $(q_1, p_1)$ , das integrable System liefert also eine Kurve in der Poincaré-Abbildung.

In Abbildung 2 sind die Poincaré-Abbildungen eines integrablen Systems und eines nichtintegrablen Systems gezeigt. Um diese zu zeichnen ist es notwendig die Bewegungsgleichungen zu lösen, was numerisch möglich ist. Die verwendeten Algorithmen sind symplektische Algorithmen, welche die Erhaltung von Erhaltungsgrößen in der numerischen Simulation gewährleisten.

---

<sup>3</sup>[1]

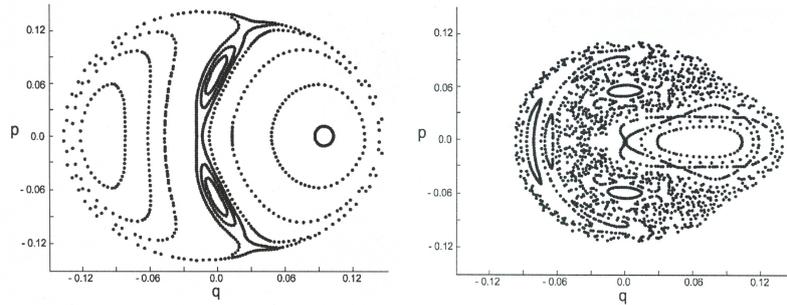


Abbildung 3: Poincaré-Abbildung<sup>4</sup> der Henon-Heiles Hamiltonfunktion für kleine Energien links und große Energien rechts. Für kleine Energien sind die Bahnen periodisch und stabil. Beim Erhöhen der Energie geht das System in chaotisches Verhalten über, es besitzt demnach keine 3. Erhaltungsgröße.

## 8.2 Henon-Heiles Potential

Ein bekanntes Beispiel für einen Poincaré-Schnitt ist der Schnitt des Henon-Heiles Systems. Angenommen wird ein Potential der Form:

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2 + 2q_1^2q_2 - \frac{2}{3}q_2^3) = E$$

Da dieser Hamiltonian die Bewegung eines Sterns um den Mittelpunkt einer Galaxie beschreiben soll, sind Energie und Drehimpuls schnell als Erhaltungsgrößen gefunden. Lange wurde nach einer 3. Erhaltungsgröße gesucht, bis die numerische Simulation gezeigt hat, dass diese nicht existiert. In Abbildung 3 ist der Poincaré-Schnitt des Systems für verschiedene Energien gezeigt.

Der Poincaré-Schnitt liefert allerdings keinen Beweis für die Integrabilität eines Systems, da immer die Möglichkeit besteht, dass die Auflösung der Abbildung nicht hoch genug war, um die volle Dynamik zu erkennen.

## 9 Störungstheorie

Da die wenigsten mechanischen Systeme integrabel sind, liegt die Frage auf der Hand, wie chaotische Systeme zu beschreiben sind. Wie aus der Quantenmechanik bekannt, bedient man sich hier der Tatsache, dass die chaotischen Systeme nur gering von den Integrablen abweichen. Die Hamiltonfunktion des ungestörten Systems  $H_0$  bildet mit der Störfunktion  $H_1$  den Hamiltonian des chaotischen Systems  $H = H_0 + H_1$ . Wird das System nun wie im Abschnitt der Wirkung-Winkel Koordinaten transformiert<sup>5</sup>, so zeigt

<sup>4</sup>[1]

<sup>5</sup>Die mathematische Diskussion ist im Vortrag zu finden.

sich, dass für jede Störung das System chaotisch wird. In den neuen Koordinaten treten Teiler auf, welche identisch 0 oder beliebig klein werden. Da jedes reale System permanent gestört wird, wirft dieses Ergebnis die Frage auf, wieso überhaupt stabile Systeme in der Realität existieren.

## 10 KAM-Theorem

Die Antwort auf das „Problem der kleinen Teiler“ erfolgte 1954 durch Kolmogorow und wurde  $\approx 1960$  von Arnold und Moser bewiesen. Dieses lautet, frei formuliert: „Für genügend rational unabhängige Frequenzen bilden diejenigen Systeme, welche unter Störung stabil bleiben, die Mehrheit in dem Sinne, dass das Maß des Komplements ihrer Vereinigung klein ist, wenn die Störung schwach ist.“

Für ein System mit zwei Freiheitsgraden lässt sich dies strenger formulieren. Diejenigen Systeme werden bei Störung nicht chaotisch, deren Frequenzen die Bedingung

$$\left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{r}{s} \right| > \frac{K(\epsilon)}{s^{2,5}} \quad \forall r, s \in \mathbb{Z}$$

erfüllen.

Naiv betrachtet sollte diese Bedingung immer erfüllt sein, da jede irrationale Zahl  $\frac{\omega_1}{\omega_2}$  beliebig genau durch einen Bruch approximiert werden kann. Beim KAM-Theorem spielt allerdings die mengentheoretische Betrachtungsweise eine Rolle. Erinnern wir uns an Mathe I, so können wir abschätzen, wie genau diese Zahl approximiert wird.  $L$  bezeichnet hierbei den Bereich für den obige Relation nicht erfüllt ist, also die Systeme, die bei Störung chaotisch werden:

$$\begin{aligned} L &< \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r < s} \left| \frac{\omega_1}{\omega_2} - \frac{r}{s} \right| < \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r < s} \frac{K(\epsilon)}{s^{2,5}} = \sum_{s=1}^{\infty} (s-1) \frac{K(\epsilon)}{s^{2,5}} \\ &< K(\epsilon) \sum_{s=1}^{\infty} s \cdot \frac{1}{s^{2,5}} = K(\epsilon) \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{s^{1,5}} \approx 2,6 \cdot K(\epsilon) \end{aligned}$$

Zudem wurde hier o.B.d.A. angenommen, dass  $\omega_i$  so gewählt ist das gilt  $\omega_1 < \omega_2$ . Daher läuft die zweite Summe nur solange  $r < s$ .

Wir sehen also, dass die Menge derjenigen Systeme die zerstört werden  $2,6K(\epsilon)$  beträgt, wobei  $1 \cong 100\%$ . Für kleine Störungen  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} K(\epsilon) = 0$  wird somit die Menge der chaotischen Systeme  $L = 0$ , folglich bleibt das System unter Störung stabil.

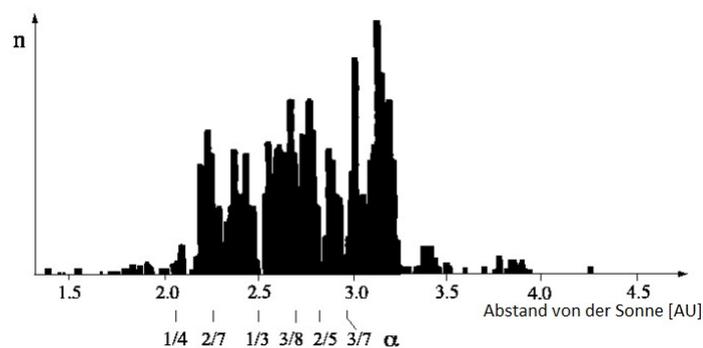


Abbildung 4: Häufigkeit  $n$  von Asteroiden im Asteroidengürtel<sup>6</sup> in Relation zum Frequenzverhältnis  $\alpha = \omega_A/\omega_J$ . Zu erkennen sind die „Kirkwood Gaps“ im Asteroidengürtel für  $\alpha = \omega_A/\omega_J = 1/2, 1/3, \dots$

## 10.1 Goldene Schnitt

Wie oben motiviert, spielt die Irrationalität der Frequenzverhältnisse eine Rolle für die Stabilität des Systems. Nun kann man sich fragen, ob eine irrationalste aller Zahlen existiert, insofern, dass sie sehr langsam durch rationale Zahlen approximiert wird. Der goldene Schnitt  $\phi$  bestimmt sich aus:

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{\phi}}}}$$

Da jeder Iterationsschritt den Bruch nur um den Bruchteil einer Eins variiert, ist der goldene Schnitt  $\phi$  somit die irrationalste aller Zahlen. Nach dem KAM-Theorem ist ein System mit Frequenzverhältnissen nahe dem goldenen Schnitt besonders stabil gegenüber Störungen.

## 10.2 Asteroidengürtel

In unserem Sonnensystem liegt zwischen Mars und Jupiter ein Asteroidengürtel, der für bestimmte Umlaufbahnen keine Asteroiden enthält. Die Lösung der Bewegungsgleichungen liefert eine Abhängigkeit der transformierten Asteroidenfrequenz  $\omega_A(R)$  vom Abstand  $R$  zur Sonne. Der nächste Planet der das System stark beeinflusst ist der Jupiter, welcher sich mit der transformierten Frequenz  $\omega_J$  bewegt. Da diverse Effekte im Sonnensystem die Bahnen stören, sollten Bahnen mit sehr schnell rational approximierbaren Frequenzverhältnis  $\omega_A/\omega_J$  zerstört werden. In Abbildung 4 sind die gemessenen Asteroidendichten in Abhängigkeit vom Sonnenabstand aufgetragen.

<sup>6</sup>[4]

## 11 Schlusswort

Abschliessend sollen die Ergebnisse noch einmal zusammengefasst werden:

- In konservativen Systemen mit  $n > 1$  Freiheitsgraden kann Chaos auftreten.
  - Als notwendige Bedingung für  $n$  Erhaltungsgrößen muss die Poincaré Abbildung regelmässige Strukturen aufweisen.
  - Da alle chaotischen Bahnen durch eine Kurve fraktaler Dimension beschrieben werden, führen kleine Änderungen in den Startbedingungen zu grundverschiedener Dynamik.
- ⇒ Die Zeitentwicklung chaotischer Systeme kann aufgrund mangelnden Wissens der Startparameter nicht vorhergesagt werden, erfolgt aber streng deterministisch!
- Wird ein System mit rationalem Frequenzverhältnis<sup>7</sup> gestört, so führt dies zu chaotischem Verhalten.
  - Systeme mit „ausreichend“ irrationalen Frequenzverhältnis weichen bei einer kleinen Störung nur leicht von ihrer Bahn ab, werden aber nicht chaotisch.

---

<sup>7</sup>Die transformierten Frequenzen müssen hier betrachtet werden.

## Literaturverzeichnis

- [1] Integrability and chaos: the classical uncertainty, Jaume Masoliver and Ana Ros, European Journal of Physics, 24.01.2011
- [2] Chaos and integrability in nonlinear dynamics: an introduction, Michael Tabor, 1989
- [3] On the degeneracy of the kepler problem, Victor A. Dulock and Harold V. McIntosh, Pacific journal of mathematics vol. 19, 1966
- [4] Nichtlineare Dynamik, Vorlesung von Prof. Dr. M. Brack, 2001/2002