

Burgersgleichung in 1D und 2D

Johannes Lülff

Universität Münster

5.12.2008

Inhaltsverzeichnis

- 1 Einführung
- 2 Numerik
- 3 Phänomenologie
- 4 Analytische Ergebnisse
- 5 Zusammenfassung

Herkunft der Burgersgleichung

Navier-Stokes-Gleichung

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Beschreibt Dynamik eines *inkompressiblen* Fluids

Burgersgleichung

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u}$$

Beschreibt Dynamik eines *perfekt kompressiblen* Fluids

Eulersche und Lagrangesche Betrachtungsweise

- Euler-Bild: Position im Raum fixiert
- Lagrange-Bild: Mit dem Fluid mitbewegt
- Lagrange-Teilchen: Virtuelles, masseloses Teilchen

Substantielle Ableitung

$$D_t A = \dot{A} := \partial_t A + (\mathbf{u} \cdot \nabla) A$$

Motivation

Large scale structure des Universums

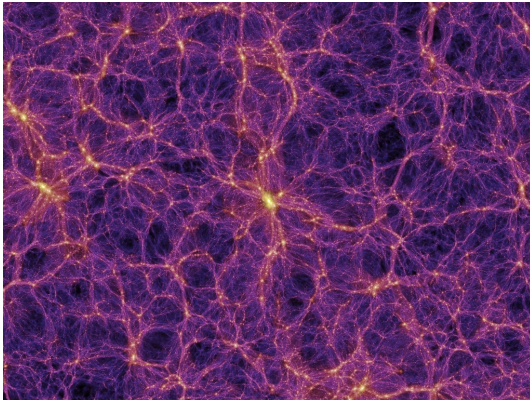


Abbildung: *Millenium Simulation*, V. Springel 2005

Motivation

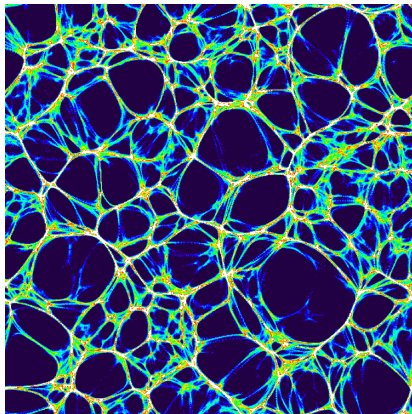


Abbildung: Eigene Simulation

Motivation

- Oberflächenphysik
- Modellierung von Verkehrsdichte, Staus
- Numerischer *testing ground*

Numerik

Zu lösende Gleichungen:

1D

$$\partial_t u = -u \partial_x u + \nu \partial_x^2 u$$

2D

$$\partial_t u_x = -(u_x \partial_x + u_y \partial_y) u_x + \nu (\partial_x^2 + \partial_y^2) u_x$$

$$\partial_t u_y = -(u_x \partial_x + u_y \partial_y) u_y + \nu (\partial_x^2 + \partial_y^2) u_y$$

Numerik

- u wird auf Gitter diskretisiert
- Zeitintegration: Explizites Runge-Kutta-Verfahren
- Ortsableitungen: Pseudospektral-Verfahren
- Periodische Randbedingungen

Numerik

Pseudospektral-Verfahren:

- Berechne Ableitungen im Fourierraum: $\mathcal{F}[\partial_x u] = ik_x \mathcal{F}[u]$
- Problem: $\mathcal{F}[u \cdot \partial_x u] = \mathcal{F}[u] * \mathcal{F}[\partial_x u]$

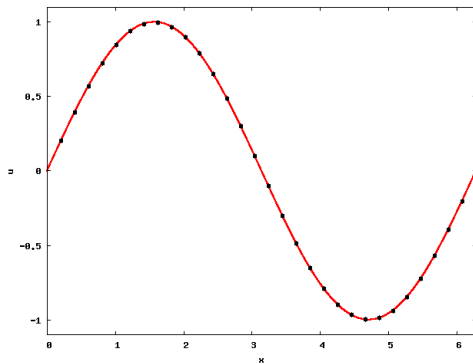
$\mathcal{F} \in \mathcal{O}(n \log n)$, aber $a * b \in \mathcal{O}(n^2)$!

- Lösung: Führe Multiplikation im Ortsraum aus!

→ $\mathcal{O}(n^2)$ -Operation wird durch $\mathcal{O}(n \log n)$ -Operationen ersetzt!

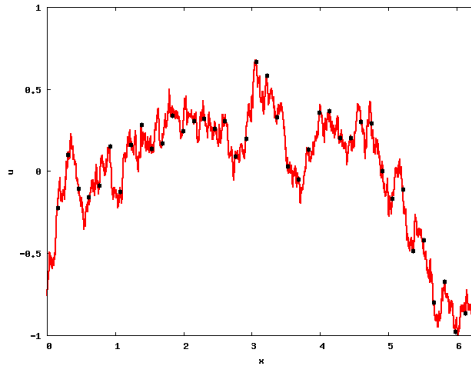
$$\mathcal{F}[u \cdot \partial_x u] = \mathcal{F}[u \cdot \mathcal{F}^{-1}[ik_x \mathcal{F}[u]]]$$

Beispiele 1D

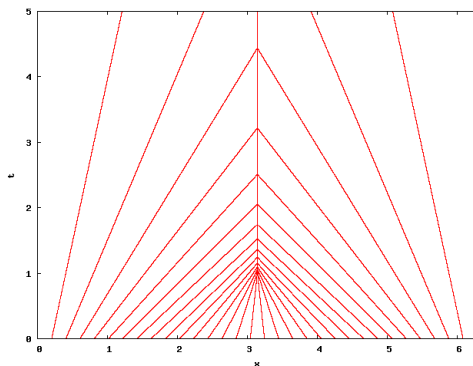


Beispiele 1D

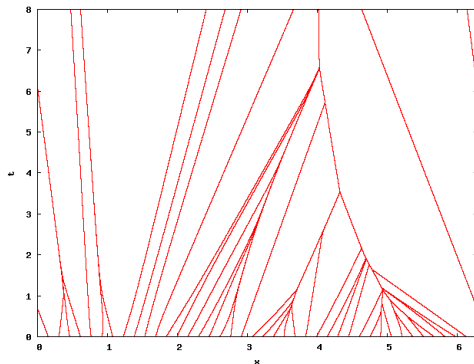
Energiespektrum $E(k) \sim k^{-2}$



Weltlinien von Lagrangeteilchen

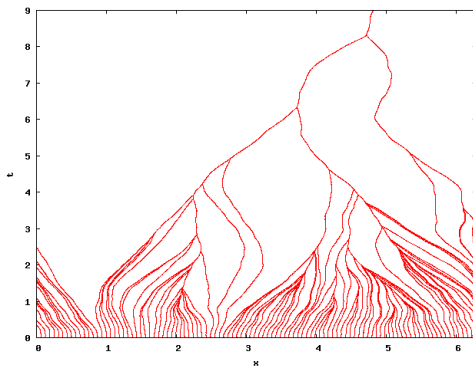


Weltlinien von Lagrangeteilchen



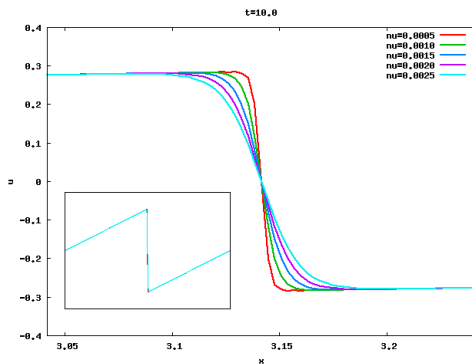
Weltlinien von Lagrangeteilchen

Zeitlich δ -korrelierte Kraft

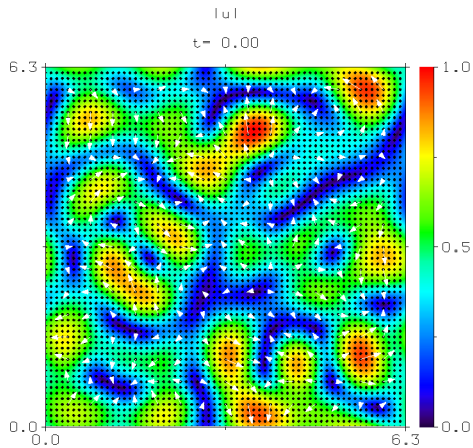


Einfluss von Viskosität

ν beeinflusst die Steilheit der Schocks

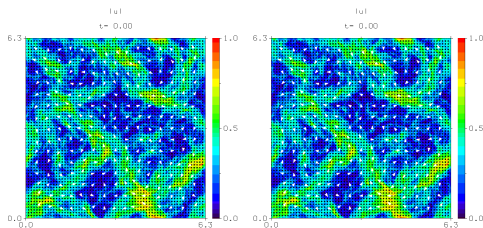


Beispiele 2D



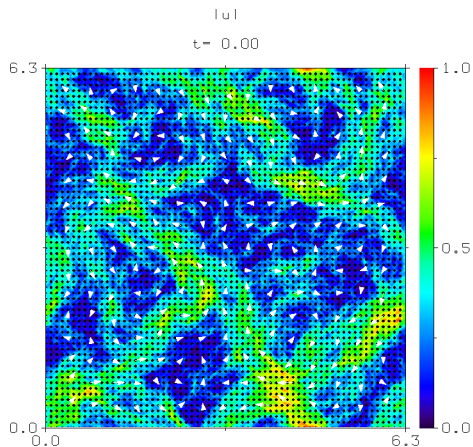
Beispiele 2D

Burgersgleichung und Navier-Stokes-Gleichung unter gleichen Anfangsbedingungen



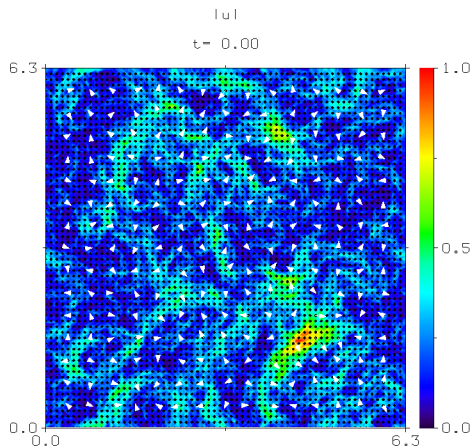
Beispiele 2D

divergenzfreie und rotationsfreie Anfangsbedingungen



Beispiele 2D

divergenzfreie und rotationsfreie Anfangsbedingungen



Hopf-Cole-Transformation

Vorraussetzung für Hopf-Cole-Transformation:

- \mathbf{u} muss Gradient eines Potentials sein
→ In 1D immer der Fall!
- Mehrdimensional: $\nabla \times \mathbf{u} \stackrel{!}{=} 0$
- Lösung dann in allen Dimensionen (nahezu) identisch

Hopf-Cole-Transformation

Annahme: \mathbf{u} besitzt Potential, $\mathbf{u} = -\nabla\psi$

Gleichung für Geschwindigkeitspotential

$$\partial_t \psi = \frac{1}{2} |\nabla \psi|^2 + \nu \Delta \psi$$

Hopf-Cole-Transformation

$$\vartheta := \exp \left[\frac{1}{2\nu} \psi \right] \quad \text{bzw.} \quad \psi = 2\nu \ln \vartheta$$

Burgersgleichung wird zur

Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t \vartheta = \nu \Delta \vartheta$$

Hopf-Cole-Transformation

Lösungsstrategie

Wende Fouriertrafo auf $\partial_t \vartheta = \nu \Delta \vartheta$ an:

$$\partial_t \mathcal{F}[\vartheta] = \mathcal{F}[\nu \Delta \vartheta] = -\nu \mathbf{k}^2 \mathcal{F}[\vartheta]$$

→ Integrieren

→ Inverse Fouriertrafo

→ Zurücksostituieren in Hopf-Cole

$$\psi(\mathbf{r}, t) =$$

$$2\nu \ln \left\{ \frac{1}{(4\pi\nu t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} d^d r' \exp \left[\frac{1}{2\nu} \left(\psi_0(\mathbf{r}') - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}{2t} \right) \right] \right\}$$

Hopf-Cole-Transformation

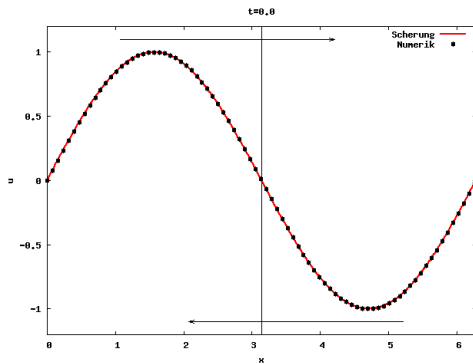
Für verschwindende Viskosität:

Potential für $\nu \rightarrow 0$

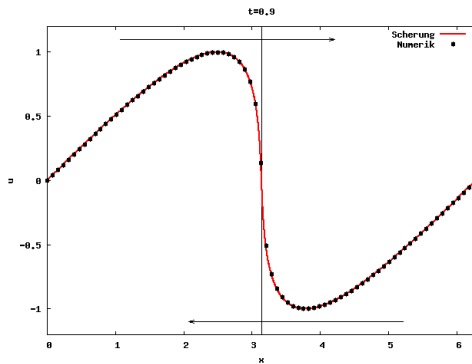
$$\psi(\mathbf{r}, t) = \max_{\mathbf{a}} \left(\psi_0(\mathbf{a}, t) - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{a}|^2}{2t} \right)$$

→ Maximum wird angenommen bei $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{u}_0(\mathbf{a})$
 \mathbf{r} eulersche, \mathbf{a} lagrangesche Koordinaten

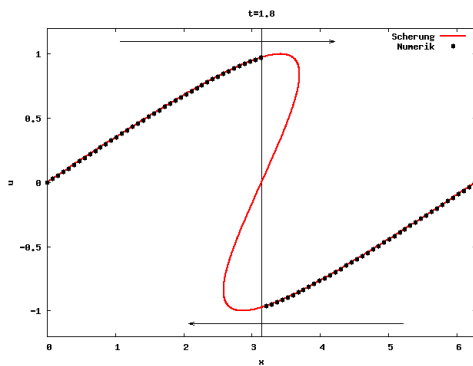
Scherung



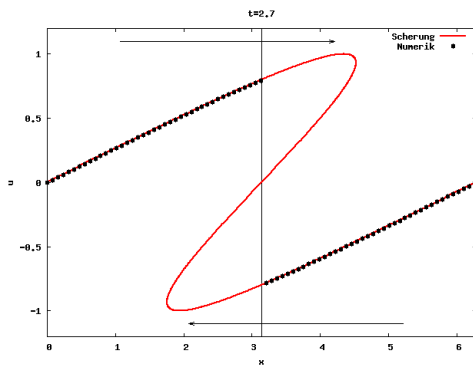
Scherung



Scherung



Scherung



Invarianten

Nichtviskose Burgersgleichung

$$\partial_t u_i + u_k \partial_k u_i = 0$$

Nach ∂_j differenzieren:

$$\partial_t \partial_j u_i + u_k \partial_k \partial_j u_i = -(\partial_k u_i)(\partial_j u_k)$$

bzw. mit $A_{ij} := \partial_j u_i$

Bewegungsgleichung des Gradiententensors

$$\dot{A}_{ij} = -A_{ik} A_{kj}$$

Invariantengleichung in 1D

Bewegungsgleichung der Invarianten

$$\dot{A} = -A^2$$

Zeitliche Entwicklung der Invarianten

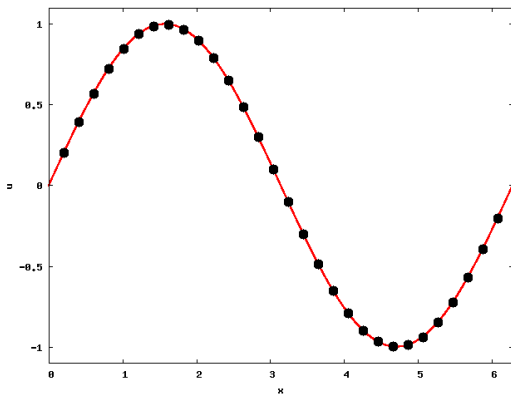
$$A(t) = \frac{1}{t + 1/A(0)}$$

Invariantengleichung in 1D

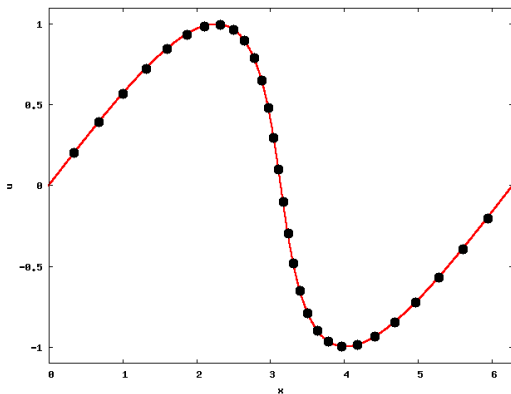
→ $A(t)$ liefert Erklärung für qualitatives Verhalten!

- $A(0) < 0$: Singularität bei $t^* = -1/A(0) \rightarrow$ Schock!
- $A(0) > 0$: Keine Singularität → A flacht $\propto 1/t$ ab

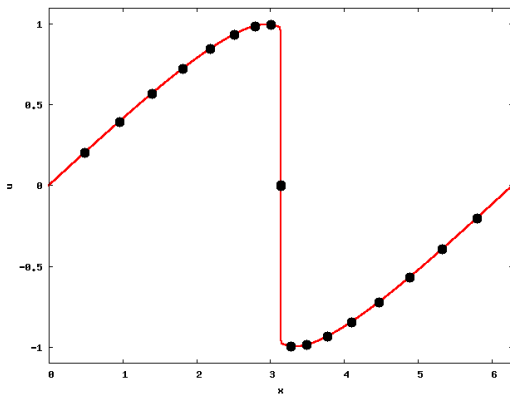
Invariantengleichung in 1D



Invariantengleichung in 1D



Invariantengleichung in 1D



Invariantengleichungen in 2D

Identifiziere als Invarianten:

Invarianten in 2D

$$A := \det A_{ij} \quad \text{und} \quad T := \text{Sp } A_{ij}$$

Aus Bewegungsgleichung des Tensors ergibt sich

Bewegungsgleichung der Invarianten

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -TA \\ \dot{T} &= -T^2 + 2A\end{aligned}$$

Invariantengleichungen in 2D

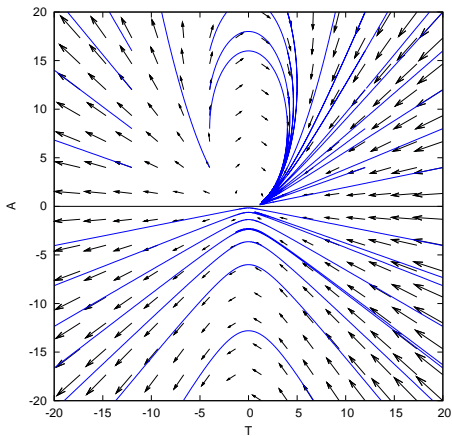
Zeitliche Entwicklung der Invarianten

$$A(t) = \frac{1}{t^2 + ct + c'}$$

$$T(t) = \frac{2t + c}{t^2 + ct + c'}$$

$$c = \frac{T(0)}{A(0)}, \quad c' = \frac{1}{A(0)}$$

Invariantengleichungen in 2D



Invariantengleichungen in 2D

Differenziere Bewegungsgleichung des Gradiententensor, nutze Cayleigh-Hamilton:

$$\begin{aligned}\ddot{A}_{ij} &= 2A_{ik}A_{kl}A_{lj} \\ &= -2T\dot{A}_{ij} - 2AA_{ij}\end{aligned}$$

Gradiententensor als gewöhnliche DGL

$$\ddot{A}_{ij} + 2\frac{2t+c}{t^2+ct+c'}\dot{A}_{ij} + 2\frac{1}{t^2+ct+c'}A_{ij} = 0$$

Invariantengleichungen in 2D

DGL wird gelöst durch

Lösung der DGL

$$A_{ij}(t) = C_1 \frac{1}{t^2 + ct + c'} + C_2 \frac{t}{t^2 + ct + c'}$$

- Lösungen gelten entlang von Lagrangetrajektorien (substantielle Ableitung!) bis zum Schock
- Keine Schocks, falls $A(0) > 0$!
- Vgl. Analogie zu 1D, $A(t) = \frac{1}{t+1/A(0)}$
→ Analytische Lösung für beliebige Dimension möglich!

Zusammenfassung

- Charakteristisch für die Burgersgleichung: Entstehung von Schockfronten
- Geschwindigkeit besitzt Potential \longrightarrow Gleichung exakt lösbar!
- Qualitatives Verhalten durch Invarianten ableitbar

Literatur

- *Burgulence*, U. Frisch, J. Bec, arXiv:nlin/0012033
- *Burgers Turbulence*, J. Bec, K. Kahnin, arXiv:0704.1611

Vielen Dank