Übungen zu Quantentheorie, WS 2010/2011

Prof. Dr. R. Friedrich

Übungen im WWW: http://pauli.uni-muenster.de/tp/

Übungsblatt 7: (13 P.) **Abgabe: 07.12.10 bzw. 09.12.10**

Aufgabe 1: (schriftlich)

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich auf einer Kugeloberfläche mit dem Radius R.

a) **[2P.]** Formulieren Sie den Hamilton-Operator und lösen Sie das ungestörte Eingenwertproblem. Welche Entartung liegt vor?

b) **[1P.]** Es wirke als Störung das homogene Schwerefeld. Finden Sie eine Observable, die sowohl mit H_0 als auch mit H_1 kommutiert.

c) **[1P.]** Geben Sie die Eigenzustände zu H_0 an. Benutzen Sie dazu die Überlegungen aus b).

d) **[1P.]** Berechnen Sie die Energiekorrektur erster Ordnung. Wird die Entartung aufgehoben?

e) **[2P.]** Was ergibt sich als Energiekorrektur zweiter Ordnung?

Hinweis: Benutzen Sie die Formel

$$\cos\theta\, Y_{lm_l}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(l+1)^2-m_l^2}{(2l+1)(2l+3)}}Y_{l+1m_l}(\theta,\varphi) + \sqrt{\frac{l^2-m_l^2}{(2l+1)(2l-1)}}Y_{l-1m_l}(\theta,\varphi).$$

Aufgabe 2: (mündlich) [3P.]

Der Hamiltonoperator eines anharmonischen linearen Oszillators sei durch

$$H = H_0 + W, \quad H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2, \quad W = \lambda\sqrt{\frac{m^3\omega^5}{\hbar}}x^3 + \mu\frac{m^2\omega^3}{\hbar}x^4$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}^+$ gegeben. Berechnen Sie in erster Ordnung Störungstheorie die Eigenwerte $E_n(\lambda,\mu)$ von H.

Hinweis: Nehmen Sie erst an, dass die Lösung des ungestörten Problem bekannt ist. Drücken Sie nun den Operator W durch den Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperator aus.

Aufgabe 3: (mündlich)

Der Hamiltonoperator eines anharmonischen linearen Oszillators sei durch

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + \frac{m^2\omega^3}{10\hbar}x^4$$

gegeben.

a) **[2P.]** Führe das Variationsverfahren unter Verwendung der Versuchsfunktionenschar

$$\{\widetilde{u}(x;\alpha) = e^{-\alpha x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+\}$$

(α Variationsparameter) durch.

b) **[1P.]** Vergleiche mit der exakten Grundzustandenergie $E_0 = 0.559146\hbar\omega$ und kommentierte das Ergebnis.

<u>**Hinweis:**</u> Verwenden Sie für die Rechnung Einheiten mit $\hbar = m = \omega = 1$. Benutzen Sie auch die Formel

$$\int_0^{+\infty} d\xi\, \xi^{2n} e^{-\beta\xi^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n+1} n! \beta^n} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}, \quad \beta \in \mathbb{R}^+, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Benutzen Sie auch die Eigenschaft, dass die kubische Gleichung $y^3 + 3py + 2q = 0$ im Falle $p^3 + q^2 > 0$ nur eine reelle Lösung besitzt. Außerdem gilt es für $p < 0$:

$$y = -\frac{2\sqrt{-p}}{\sin 2\psi}, \quad \tan\psi = \sqrt[3]{\tan\frac{\varphi}{2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{-p^3}}{q}, \quad -\frac{\pi}{4} < \psi < \frac{\pi}{4}, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$