`Übungen zu Quantentheorie, WS 2010/2011`

Prof. Dr. R. Friedrich

Übungen im WWW: `http://pauli.uni-muenster.de/tp/`

Übungsblatt 4: (9 P.) **Abgabe: 16.11.10 bzw. 18.11.10**

Aufgabe 1: (schriftlich) [3 P.]

Zeigen Sie, dass die Dirac-Matrizen

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbf{I_2} & 0 \\ 0 & -\mathbf{I_2} \end{pmatrix}$$

die Bedingungen

$$\begin{aligned} &a) \quad \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij}\mathbf{I_4}; \\ &b) \quad \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0; \\ &c) \quad \beta^2 = \mathbf{I_4} \end{aligned}$$

erfüllen, wobei $\mathbf{I_n}$ die $n \times n$ Einheitsmatrix ist und σ_i, $i = \{1, 2, 3\}$ die Pauli-Matrizen sind.

Aufgabe 2: Spin im Magnetfeld (mündlich)

a) **[1 P.]** Wie lautet der Hamilton-Operator für einen Spin im Magnetfeld $\mathbf{B}$?

b) **[3 P.]** Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt}\langle S_i^2 \rangle = 0\,, \quad i = x,\, y,\, z\,.$$

ist.

Hinweis: Benutzen Sie die Relation

$$\frac{d}{dt}\langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [A, H] \rangle\,.$$

Verwenden Sie weiter die Kommutator-Beziehung

$$[A^2,\, H] = A\,[A,\, H] + [A,\, H]\,A\,.$$

Beweisen Sie diese Beziehung.

c) **[2 P.]** Berechnen Sie explizit die Operatoren

$$S_x^2\,, \quad S_y^2\,, \quad S_z^2\,, \quad \mathbf{S}^2\,.$$

Berechnen Sie nun die Erwartungswerte

$$\langle S_x^2 \rangle\,, \quad \langle S_y^2 \rangle\,, \quad \langle S_z^2 \rangle\,.$$