

Übungsblatt 2: (16 P.)

Abgabe: 02.11.10 bzw. 04.11.10

Aufgabe 1: Eichtransformation (schriftlich) [2 P.]

Betrachten Sie die Eichtransformation der elektrostatischen Potentiale

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{A}' + \nabla Q, \\ \Phi &= \Phi' - \dot{Q}, \end{aligned} \quad (1)$$

sowie die Lösungen der dazugehörigen zeitabhängigen Schrödingergleichungen, $\psi(\mathbf{x}, t)$ und $\psi'(\mathbf{x}, t)$. Beweisen Sie, dass beide Lösungen durch die Transformation

$$\psi'(\mathbf{x}, t) = e^{iG(\mathbf{x}, t)} \psi(\mathbf{x}, t) \quad (2)$$

verknüpft sind. Berechnen Sie dazu explizit den Phasenfaktor $G(\mathbf{x}, t)$.

Aufgabe 2: Rotation eines starren Körpers: Quantenmechanische Behandlung (mündlich)

- [1P.] Betrachten Sie die Rotation eines Moleküls um seinen Schwerpunkt, das Sie durch einen starren Körper mit dem Trägheitstensor Θ beschreiben. Bestimmen Sie die Rotationsenergie des Moleküls. Drücken Sie diese durch seinen Drehimpuls aus.
- [1P.] Betrachten Sie zunächst einen symmetrischen starren Körper mit den Hauptträgheitsmomenten $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3 = \Theta_0$. Wie lautet der Hamiltonoperator? Bestimmen Sie die Eigenzustände und die Energieeigenwerte dieses Operators.
- [2P.] Wie entwickelt sich der Anfangszustand

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|1, 1\rangle + |2, 0\rangle \right] \quad (3)$$

wobei die Vektoren $|l, m\rangle$ die Kugelflächenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ bezeichnen. Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung des Drehimpulsoperators $\langle \psi(t) | \mathbf{L}^2 | \psi(t) \rangle$.

- [1P.] Betrachten Sie jetzt den Fall $\Theta_1 = \Theta_2 \neq \Theta_3$. Wie lautet der Hamiltonoperator? Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren.
- [1P.] Wie entwickelt sich der Anfangszustand (3) in diesem Fall? Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle L_z \rangle$, $\langle L_z^2 \rangle$, $\langle \mathbf{L}^2 \rangle$?
- [1P.] Nehmen Sie nun an, dass die Rotation des Moleküls mit einem magnetischen Moment

$$\mu = -g_M \frac{\mu_B}{\hbar} \mathbf{L} \quad (4)$$

verknüpft ist. Wie lautet der Hamiltonoperator? Bestimmen Sie das Energiespektrum und die Eigenfunktionen im homogenen Magnetfeld. Skizzieren Sie die Energieniveaus in Abhängigkeit des Magnetfeldes B .

- [2P.] Bestimmen Sie die zeitliche Entwicklung der Erwartungswerte $\langle L_x \rangle$ und $\langle L_y \rangle$ für Zustände mit der Anfangsbedingung (3) sowie für den allgemeinen Fall $|\psi\rangle = \sum_m c_m |l, m\rangle$.

Hinweis: Verwenden Sie die Leiteroperatoren L_{\pm} .

Aufgabe 3: Spin im zeitabhängigen Magnetfeld (schriftlich)

Betrachten Sie ein Teilchen mit Spin $1/2$ in einem räumlich konstanten, aber zeitlich veränderlichen Magnetfeld $\mathbf{B} = [B_x(t), 0, B_z]$.

- a) [1P.] Wie lautet die zeitabhängige Schrödingergleichung?
- b) [2P.] Bestimmen Sie die Bewegungsgleichungen für die Amplituden c_+ und c_- des Zustandes

$$|\psi\rangle = c_+(t)|\frac{1}{2}\rangle + c_-(t)|-\frac{1}{2}\rangle \quad (5)$$

Benützen Sie dazu die Matrix-Darstellungen der Spinoperatoren S_x, S_y, S_z .

- c) [1P.] Wie lauten die Lösungen für den Fall $B_x = 0$?
- d) [1P.] Bestimmen Sie die Lösung für den Fall $B_x = B$ (B : zeitlich konstant).