`Übungen zu Quantentheorie, WS 2010/2011`

Prof. Dr. R. Friedrich

Übungen im WWW: `http://pauli.uni-muenster.de/tp/`

Übungsblatt 10: (12 P.) **Abgabe: 25.01.11 bzw. 27.01.11**

Aufgabe 1: [5 P.] **(mündlich)**

Zwei nichtwechselwirkende identische Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen befinden sich in einem unendlich tiefen eindimendsionalen Kastenpotential

$$V(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{für} \quad |x| \leq a\,, \\ +\infty\,, & \text{für} \quad |x| > a\,. \end{cases}$$

Da der Hamiltonoperator des betrachteten Zweiteilchensystems nicht vom Spin abhängt, vertauscht er mit den Operatoren $\mathbf{S}^2$ und S_z, und die Energieeigenzustände können unter anderem durch die Quantenzahlen S, M_s zum Gesamtspin gekennzeichnet werden ($\mathbf{S} = \mathbf{S}^{(1)} + \mathbf{S}^{(2)}$ Operator zum Gesamtspin).
Schreiben Sie die ensprechenden auf eins normierten Eigenfunktionen der sechs Zweiteilchenzustände niedriger Energien an. Wie groß sind die zugehörigen Energien des Zweiteilchensystems?

Hinweis: Die Einteilchenenergien

$$\epsilon_{n-1} = \frac{\hbar^2\,\pi^2}{8\,m\,a^2}\,n^2\,, \qquad n \in N$$

und Einteilchen-Energireigenfunktionen

$$\psi_{n-1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\,\cos\frac{n\,\pi\,x}{2\,a}\,, & |x| \leq a\,, \quad n = 1,\,3,\,5\ldots \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\,\sin\frac{n\,\pi\,x}{2\,a}\,, & |x| \leq a\,, \quad n = 2,\,4,\,6\ldots \end{cases}$$

können dabei als bekannt angesehen werden.

Aufgabe 2: [3 P.] **(mündlich)**

Drei nicht wechelwirkende identische Teilchen mit Spin $s = 0$ befinden sich in einem unendlich tiefen eindimensionalen Kastenpotential

$$V(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{für} \quad |x| \leq a\,, \\ +\infty\,, & \text{für} \quad |x| > a\,. \end{cases}$$

Berechnen Sie die auf eins normierten Energieeigenfunktionen für den Grundzustand und die zwei energetisch niedrigsten Anregungszustände des Dreiteilchensystems. Wie groß sind die zugehörigen Energien des Dreiteilchensystems?

Hinweis: Die Einteilchenenergien ϵ_{n-1} und Einteilchen-Energireigenfunktionen $\psi_{n-1}(x)$ können dabei als bekannt angesehen werden (siehe Aufgabe 1).

<u>Aufgabe 3:</u> [4 P.] (schriftlich)

Der Hamiltonoperator eines Systems von zwei wechselwirkenden identischen Teilchen mit Spin $s = 0$ und Masse μ sei durch

$$H = \frac{(P^{(1)})^2 + (P^{(2)})^2}{2\,\mu} + \frac{\mu\,\Omega^2}{2}\Big((X^{(1)})^2 + (X^{(2)})^2\Big) + \frac{\mu\,\lambda^2}{2}\Big(X^{(1)} - X^{(2)}\Big)^2$$

gegeben (eindimensionales Problem). Lösen Sie das Eigenwertproblem von H exakt und schreiben Sie die auf eins normierten Energieeigenfunktionen an.

<u>Hinweis:</u>

- Transformiere von den Operatoren $X^{(1)}$, $X^{(2)}$, $P^{(1)}$, $P^{(2)}$ auf die Operatoren X_0, X, P_0, P, welche die Schwerpunktskoordinate, die Relativkoordinate, den Swerpunktsimpuls und den Relativimpuls repräsentiert.
- Die Einteilchenenergien und Einteilchen-Energireigenfunktionen des linearen harmonischen Oszillators können dabei als bekannt angesehen werden;